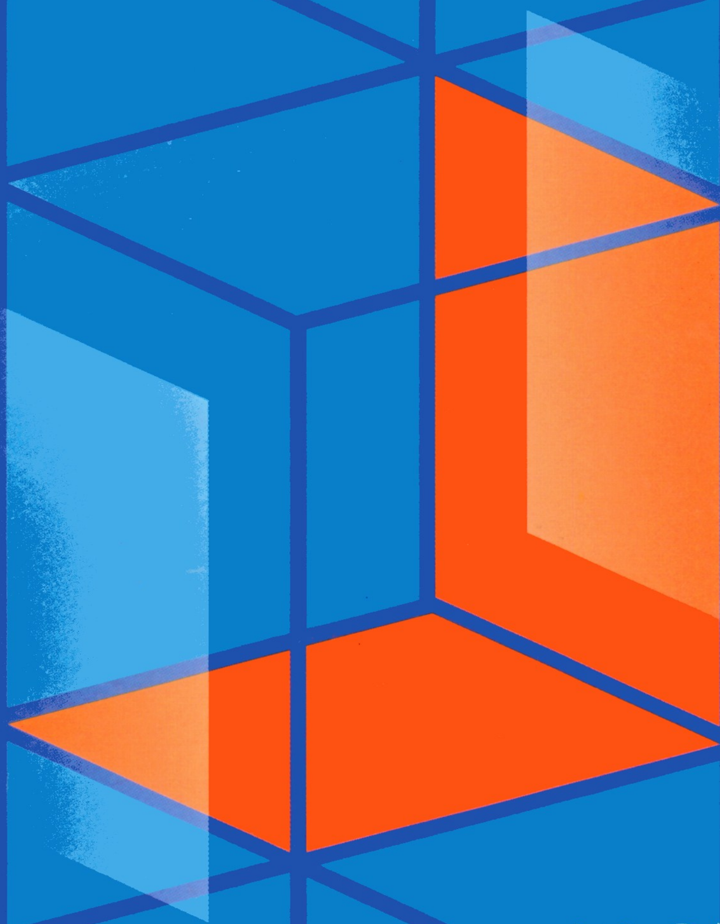


Petras Vaškas

GEOMETRIJOS UŽDAVINYNAS



KRONTA

Petras Vaškas

Geometrijos uždavinynas

su komentarais ir sprendimais

KRONTA
Vilnius 2006

Recenzentas	*doc. dr. Ričardas Kudžma*
Kalbos redaktorė	*Lina Stašinskienė*
Viršelio dailininkas	*Rimantas Rolia*
Maketuotojas	*Darius Kazlauskas*

ISBN 9955-595-77-9

Turinys

1. Taškų ir tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje 4
2. Taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtis 7
3. Tvarkos plokštumoje aksiomos 14
4. Erdvės dalijimas 17
5. Paprasčiausios plokščiosios figūros 18
6. Plokštumos vektoriai 20
7. Veiksmai su plokštumos vektoriais 29
8. Plokštumos vektorių ir taškų koordinatės 40
9. Erdvės vektoriai 42
10. Plokštumos judesiai ir figūrų lygumas 57
11. Erdvės judesiai ir figūrų lygumas 61
12. Plokštumos tiesių statmenumas 62
13. Trikampių lygumo požymiai 64
14. Plokščiųjų figūrų panašumas 66
15. Tiesių ir plokštumų statmenumas 68
16. Plokštumos vektorių skaliarinė daugyba 72
17. Erdvės vektorių skaliarinė daugyba 81
18. Orientuotoji plokštuma 93
Literatūra 95

1. Taškų ir tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje

Suformulavus tiesės aksiomą, smulkiai įrodoma dviejų tiesių susikirtimo teorema. Čia konkrečiu pavyzdžiu primenamas prieštaros metodas. Galima jį aptarti plačiau.

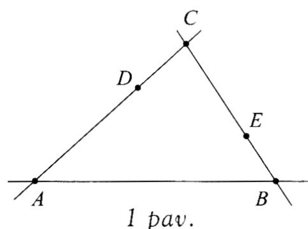
Lygiagrečiųjų tiesių sąvoka formuojama taip, kaip pagrindinės mokyklos kurse. Paskui įrodoma tiesės ir lygiagrečiųjų tiesių susikirtimo teorema. Įrodymas, atrodytų, tiesioginis, nedarant jokių papildomų prielaidų. Tačiau taip nėra. Daroma prielaida apie tris tieses. Taigi iš esmės įrodomas sąlyginis teiginys. Tokių teiginių bus ir daugiau.

Plokštumos tiesių lygiagretumo tranzityvumo įrodymas yra dar vienas paprastas įrodymo prieštaros metodu pavyzdys. Tolesniame kurse įrodymo metodai dažniausiai neminimi; tuo labiau, kad, įrodinėjant sudėtingesnes teoremas, pavienės teiginio dalys gali būti įrodomos skirtingais metodais.

Uždaviniai

1. Pažymėkite taškus A ir B. Nubrėžkite tiesę AB. Pažymėkite tašką C, nepriklausantį tiesei AB. Tiesėje AC pasirinkite naują tašką D, tiesėje BC – naują tašką E. Įrodykite, kad taškai D ir E nepriklauso tiesei AB.

   Aptarkite įrodymo metodą.



1 pav.

Sprendimas

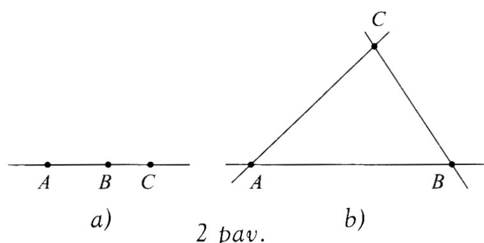
Brėžimas pavaizduotas 1 paveiksle. Aišku, kad įrodydami tuo paveikslu (vaizdumu) neturime remtis. Tarkime, kad taškas D priklauso tiesei AB. Tada tiesės AB ir AC turi du bendrus taškus (A ir D). Tai prieštarauja dviejų tiesių susikirtimo teoremai. Vadinasi, prielaida „taškas D priklauso tiesei AB“ yra klaidinga. Taigi taškas D nepriklauso tiesei AB.

Akivaizdu, kad teiginį įrodėme prieštaros metodu.

Panašiai įrodytume, kad taškas E nepriklauso tiesei AB.

Pastaba. Tik dėl to, kad „tiesei priklauso kiek norima taškų“ (o ne apskirtai „yra taškų, priklausančių tiesei“), galima pasirinkti taškus D ir E.

2. Kiek tiesių nusako trys taškai; keturi taškai?

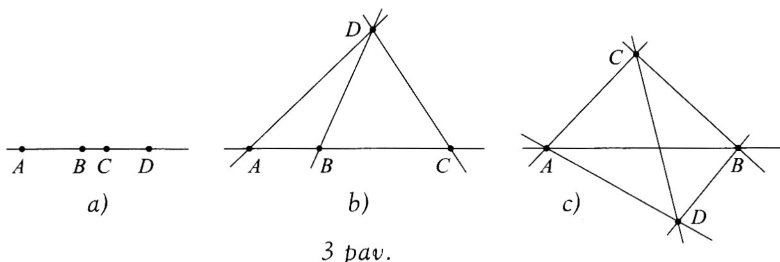


2 pav.

Sprendimas

Jei trys taškai yra vienoje tiesėje, tai jie tą vieną tiesę ir nusako (2 pav., *a*). Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai jie nusako tris tieses (2 pav., *b*).

Jei keturi taškai yra vienoje tiesėje, tai jie tą vieną tiesę ir nusako (3 pav., *a*).



3 pav.

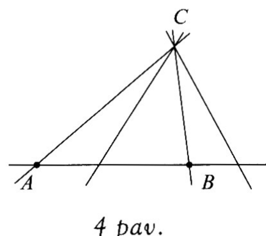
Jei trys taškai yra vienoje tiesėje, o ketvirtas ne joje, tai tie keturi taškai nusako keturias tieses (3 pav., *b*).

Jei jokie trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai tie keturi taškai nusako šešias tieses (3 pav., *c*).

3. Kiek tiesių yra plokštumoje?

Sprendimas

Sakoma, kad plokštumai priklauso kiek norima taškų. Pasirinkime du iš jų (4 pav.). Tie du taškai nusako tiesę (remiamės tiesės aksioma). Du tos tiesės taškus pažymėkime raidėmis *A* ir *B*. Yra taškų, nepriklausančių tai tiesei. Vieną iš jų pažymėkime raide *C*.



4 pav.

Tiesės *CA* ir *CB* yra skirtingos (priešingu atveju taškai *A*, *B*, *C* būtų vienoje tiesėje). Kadangi tiesėje yra kiek norima (be galo daug) taškų, tai per tašką *C* eina be galo daug tiesių. Vadinasi, plokštumoje yra be galo daug tiesių.

4. Yra šešios poromis susikertančios tiesės. Per bet kurių dviejų tiesių susikirtimo tašką eina dar mažiausiai viena iš tų tiesių. Įrodykite, kad visos šešios tiesės eina per vieną tašką.

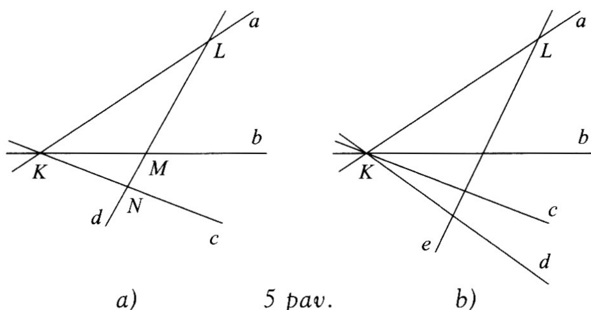
Sprendimas

Turimas tieses pažymėkime raidėmis *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Pasirinkime dvi iš tų tiesių, pavyzdžiui, *a* ir *b*. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide *K*.

Per tašką *K* eina dar bent viena iš tų šešių tiesių. Sakykime, tai tiesė *c*. Kadangi nagrinėjamos tiesės poromis kertasi (kiekvienos dvi tiesės kertasi), tai tiesė *d* kerta kiekvieną iš tiesių *a*, *b*, *c*.

Tarkime, kad tiesė *d* neina per tašką *K*. Jos ir tiesių *a*, *b*, c susikirtimo taškus pažymėkime raidėmis *L*, *M*, *N* (5 pav., *a*). Kadangi per kiekvieną dviejų nagrinėjamų tiesių susikirtimo tašką eina dar bent viena iš tų tiesių, tai per kiekvieną iš trijų taškų *L*, *M*, *N* turi eiti dar bent po vieną tiesę. Tačiau liko tik dvi tiesės (*e* ir *f*). Taigi turime manyti, kad prielaida



5 pav.

„tiesė *d* neina per tašką *K*“ yra klaidinga. Vadinasi, tiesės *a*, *b*, *c*, *d* eina per tašką *K*.

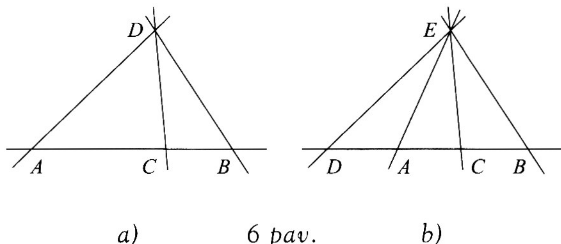
Jei tartume, kad tiesė *e* neina per tašką *K* (5 pav., *b*), tai per kiekvieną iš keturių tiesės *e* ir tiesių *a*, *b*, *c*, *d* susikirtimo taškų eitų dar po vieną iš turimų tiesių. Tačiau liko tik viena tiesė (*f*). Taigi ir prielaidą „tiesė *e* neina per tašką *K*“ turime manyti esant klaidingą. Vadinasi, tiesės *a*, *b*, *c*, *d*, *e* eina per tašką *K*.

Panašiai įrodytume, kad ir tiesė *f* eina per tašką *K*. Taigi visos šešios tiesės eina per vieną tašką.

5. Yra šeši taškai. Per bet kuriuos du taškus einanti tiesė eina mažiausiai dar per vieną iš tų taškų. Įrodykite, kad visi šeši taškai yra vienoje tiesėje.

Sprendimas

Turimus taškus pažymėkime raidėmis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Pasirinkime du iš tų taškų, pavyzdžiui, *A* ir *B*.



a) 6 *pav.* *b)*

Tiesėje *AB* yra dar bent vienas iš tų šešių taškų. Sakykime, tai taškas *C*. Tarkime, kad taškas *D* nėra tiesėje *AB* (6 pav., *a*). Remdamiesi uždavinio sąlyga, gauname, kad kiekvienoje iš trijų tiesių *DA*, *DB*, *DC* turi būti dar po vieną iš likusių taškų. Tačiau liko tik du taškai (*E* ir *F*). Taigi prielaidą „taškas *D* nėra tiesėje *AB*“ turime laikyti klaidinga. Vadinasi, taškai *A*, *B*, *C*, *D* yra vienoje tiesėje.

Jei tartume, kad taškas *E* nėra tiesėje *AB* (6 pav., *b*), tai kiekvienoje iš keturių tiesių *EA*, *EB*, *EC*, *ED* turėtų būti dar po vieną iš likusių taškų. Tačiau liko tik vienas taškas (*F*). Taigi ir prielaidą „taškas *E* nėra tiesėje *AB*“ turime laikyti klaidinga. Vadinasi, taškai *A*, *B*, *C*, *D*, *E* yra tiesėje *AB*. Panašiai įrodytume, kad ir taškas *F* yra tiesėje *AB*. Taigi visi šeši taškai yra vienoje tiesėje.

6. Taškai *M* ir *N* nepriklauso tiesei *a*. Per juos nubrėžtos tiesės *b* ir *c*, lygiagrečios su tiese *a*. Ar tiesės *b* ir *c* gali susikirsti, sutapti?

Sprendimas

Tiesės *b* ir *c* negali susikirsti, nes tada per jų susikirtimo tašką eitų dvi tiesės, lygiagrečios su tiese *a*. Tai prieštarauja lygiagrečiųjų tiesių aksiomai.

Jei tiesė, einanti per tašką *M* (*N*) ir lygiagreti su tiese *a*, eitų per tašką *N* (*M*), tai tiesės *b* ir *c* sutaptų (būtų ta pati tiesė, tik pažymėta skirtingomis raidėmis).

2. Taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtis

Taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio pãdėtis nusakančios aksiomos iš esmės yra tos pačios aksiomos, kaip ir X klasės vadovėlyje.

Teoremų galima parinkti daug. Jų parinkimą lemia numatomas tolesnis nagrinėjimas. Programoje numatytas pagrindinių stereometrijos teiginių (susijusių su tiesių ir plokštumų lygiagretumu) įrodymas.

Aptariamame leidinyje [2] parinktos teoremos susietos dalyko loginiais ryšiais, visos jos įrodytos. Aišku, nebūtina mokytis visas tas teoremas įrodyti. Pakaktų perskaityti jų formuluotes, suvokti loginius ryšius (tam tikra dalis žinoma iš pagrindinės mokyklos kurso), t. y. tai, ko prireiks tolesniame kurse (jos tokios ir parinktos).

Kalbant apie teoremų įrodymus (kas jais domėsis), verta pasirinkti toje knygelėje [2] pateiktuosius. Tai nėra autoriaus užgaida. Pateikiami tie įrodymai, kurie susiję su pasirinktomis aksiomomis ir ko jomis siekiama (o tai skaitančiajam gali paaiškėti gerokai vėliau). Be to, viename leidinyje pateikti teiginiai gali būti laikomi aksiomomis, kitame – įrodomi kaip teoremos. Nesant galimybių išnagrinėti visų knygelėje pateiktų įrodymų, ir tuos, kurie pateikti kaip teoremos, tenka laikyti aksiomomis.

Skaitant įrodymus, verta atkreipti dėmesį į vadinamuosius egzistavimo ir vienaties teoremų įrodymus. Įrodant egzistavimą, dažniausiai norimas objektas sukonstruojamas. Įrodant vienatį, netinka remtis tuo, kad tą objektą konstruojant aptartu būdu visi veiksmai atliekami vienareikšmiškai. Mat nėra garantijos, kad konstruodami kitu būdu negausime kito teoremos sąlygas tenkinančio objekto. Į tai atkreiptinas dėmesys dar ir dėl to, kad savarankiškai siūloma įrodyti plokštumos, einančios per tašką ir tiesę, vienatį.

Uždaviniai

7. Taškai A, B, C, D nėra vienoje plokštumoje. Kiek tiesių ir kiek plokštumų jie nusako? Kiek tiesių yra kiekvienoje tų plokštumų?

Sprendimas

Jokie trys iš tų taškų nėra vienoje tiesėje (priešingu atveju visi keturi taškai būtų vienoje plokštumoje).

Kadangi du taškai nusako vienintelę tiesę, o trys taškai, nesantys vienoje tiesėje, – vienintelę plokštumą, tai tie keturi taškai nusako šešias tieses (AB, AC, AD, BC, BD, CD) ir keturias plokštumas (ABC, ABD, BCD, CDA).

Kiekvienoje plokštumoje yra trys tiesės. Pavyzdžiui, plokštumoje ABC yra tiesės AB, BC, CA.

Pastaba. Jei visi keturi taškai yra vienoje tiesėje, tai irgi galima sakyti, kad jie nėra vienoje plokštumoje. Mat per tą tiesę eina be galo daug plokštumų. Šis atvejis čia nenagrinėjamas.

8. Kiek plokštumų nusako keturi taškai?

Sprendimas

Jei visi keturi taškai yra vienoje tiesėje, tai jie nenusako nė vienos plokštumos (yra be galo daug per tą tiesę einančių plokštumų, tačiau tie keturi taškai neišskiria nė vienos iš jų).

Jei trys taškai yra vienoje tiesėje, o ketvirtas taškas nėra toje tiesėje, tai visi keturi taškai nusako vieną plokštumą.

Jei visi keturi taškai yra vienoje plokštumoje, tai jie nusako vieną plokštumą.

Jei tie keturi taškai nėra vienoje plokštumoje, tai jie nusako keturias plokštumas (žr. 7 uždavinį).

9. Keturi taškai yra vienoje plokštumoje, bet jokie trys iš jų nėra vienoje tiesėje. Penktas taškas tai plokštumai nepriklauso. Kiek plokštumų nusako tie penki taškai?

Sprendimas

Pirmi keturi taškai nusako vieną plokštumą.

Bet kurie du iš tų keturių taškų ir penktas taškas nusako plokštumą. Gauname dar šešias plokštumas.

Taigi minėti penki taškai nusako septynias plokštumas.

10. Dvi tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje, taškas C nepriklauso tai plokštumai. Kiek plokštumų (be turimos) nusako tiesės a, b ir taškas C?

Sprendimas

Taškas C nėra nė vienoje iš tiesių a ir b (priešingu atveju jis būtų tiesių a ir b plokštumoje), todėl tiesė a ir taškas C nusako plokštumą, tiesė b ir taškas C nusako plokštumą. Tos plokštumos nesutampa (priešingu atveju tiesės a, b ir taškas C būtų vienoje plokštumoje). Vadinasi, be turimos plokštumos, tiesės a ir b bei taškas C nusako dvi plokštumas.

11. Trys tiesės eina per vieną tašką. Kiek plokštumų jos nusako?

Sprendimas

Galimi du atvejai.

a) Visos trys tiesės yra vienoje plokštumoje. Tą vieną plokštumą jos ir nusako.

b) Tiesės nėra vienoje plokštumoje. Bet kurios dvi iš tų tiesių nusako plokštumą.

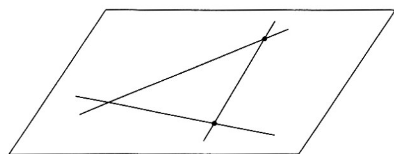
Taigi iš viso jos nusako tris plokštumas.

12. Kiekvienos dvi iš trijų tiesių susikerta. Kiek plokštumų jos nusako?

Sprendimas

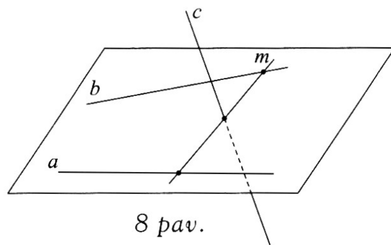
Jei visos trys tiesės susikerta viename taške, tai jos nusako vieną arba tris plokštumas (žr. 11 uždavinį).

Sakykime, tiesė kerta dvi susikertančias tieses ne jų susikirtimo taške (7 pav.). Tada du jos taškai yra pirmų dviejų tiesių plokštumoje. Todėl ir ta tiesė yra jų plokštumoje. Vadinasi, visos trys tiesės yra vienoje plokštumoje (nusako vieną plokštumą).



7 pav.

13. Tiesė m kerta tris tieses a, b ir c. Ar tiesės a, b ir c gali būti ne vienoje plokštumoje?



8 pav.

Sprendimas

Gali. Pavyzdžiui, tiesė m yra tiesių a ir b plokštumoje ir kerta jas, o tiesė c kerta tiesę m ir nėra tiesių a ir b plokštumoje (8 pav.).

14. Keturi taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Išvardykite jų nusakytų prasilenkiančiųjų tiesių poras.

Sprendimas

Tarsime, kad taškai A, B, C, D nėra vienoje tiesėje. (Kai taškai A, B, C, D yra vienoje tiesėje, galima sakyti, kad jie nėra vienoje plokštumoje. Mat per tiesę eina be galo daug plokštumų.)

Aišku, kad prasilenkiančiųjų tiesių poros yra: AB ir CD, AC ir BD, AD ir BC (remiamės prasilenkiančiųjų tiesių apibrėžimu).

15. Tiesė a kerta plokštumą α. Plokštuma β eina per tiesę a. Kokia plokštumų α ir β tarpusavio padėtis? Kaip plokštumoje α reikia brėžti tiesę b, kad a ir b būtų prasilenkiančios tiesės?

Sprendimas

Plokštumos α ir β nesutampa, nes tada tiesė a būtų plokštumoje α.

Plokštuma β eina per tiesės a ir plokštumos α susikirtimo tašką. Taigi skirtingos plokštumos α ir β turi bendrą tašką. Vadinasi, jos susikerta.

Tiesė b turi neiti per tiesės a ir plokštumos α susikirtimo tašką (remiamės prasilenkiančiųjų tiesių požymiu).

16. Prasilenkiančiose tiesėse a ir b pažymėti taškai M ir N. Plokštuma α eina per tiesę a ir tašką N, plokštuma β – per tiesę b ir tašką M. Ar tiesė b yra plokštumoje α? Ar susikerta plokštumos α ir β; jei susikerta, kokia jų susikirtimo tiesė?

Sprendimas

Tiesė b nėra plokštumoje α, nes priešingu atveju a ir b nebūtų prasilenkiančios tiesės.

Kadangi plokštuma α eina per tiesės b tašką N, o plokštuma β eina per tiesę b, tai taškas N yra bendras plokštumų α ir β taškas. Panašiai gautume, kad taškas M irgi yra bendras tų plokštumų taškas. Vadinasi, plokštumos α ir β susikerta tiese MN.

17. Ar teisingas teiginys: jei tiesė kerta vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji kerta ir kitą tiesę?

Sprendimas

Dvi lygiagrečios tiesės yra vienoje plokštumoje. Jei tiesė kerta vieną iš jų ir nėra toje plokštumoje, tai ji ir antroji tiesė yra prasilenkiančiosios tiesės. Vadinasi, minėtas teiginys yra klaidingas. (Jis teisingas tik planimetrijoje – kai visos tiesės yra vienoje plokštumoje.)

18. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios dvi lygiagrečias tieses, yra vienoje plokštumoje.

Sprendimas

Dvi lygiagrečios tiesės yra vienoje plokštumoje. Du jas kertančios tiesės taškai (susikirtimo su lygiagrečiomis tiesėmis taškai) yra toje plokštumoje. Vadinasi, joje yra ir tiesė.

Taigi visos tiesės, kertančios dvi lygiagrečias tieses, yra vienoje plokštumoje.

19. Tiesės a ir b yra lygiagrečios. Tiesė c eina per tiesės b tašką M. Kokia gali būti tiesių a ir c tarpusavio padėtis?

Sprendimas

Per tašką M einanti tiesė c gali sutapti su tiese b. Tada a ir c – lygiagrečios tiesės.

Sakykime, tiesė c nesutampa su tiese b ir yra tiesių a, b plokštumoje. Tada tiesė c kerta tiesę b, todėl kerta ir tiesę a (priešingu atveju plokštumoje per tašką M eitų dvi tiesės, lygiagrečios su tiese a, o tai prieštarauja lygiagrečiųjų tiesių aksiomai).

Jei tiesė c nėra tiesių a *ir* b plokštumoje, tai a ir c yra prasilenkiančios tiesės (remiamės prasilenkiančiųjų tiesių požymiu).

20. Tiesės a ir b yra prasilenkiančios. Tiesė a' eina per tiesės b tašką N ir yra lygiagreti su tiese a. Tiesė b' eina per tiesės a tašką M ir yra lygiagreti su tiese b. Įrodykite, kad a' ir b' yra prasilenkiančios tiesės.

Sprendimas

Lygiagrečios tiesės a ir a' yra vienoje plokštumoje. Pažymėkime ją raide α.

Tiesė b' ir plokštuma α turi bendrą tašką M. Tiesė b' nėra plokštumoje α, nes priešingu atveju ir tiesė b, einanti per plokštumos α tašką N ir lygiagreti su tiese b', būtų plokštumoje α. Išeitų, kad a ir b nėra prasilenkiančios tiesės.

Gavome, kad tiesė b' kerta plokštumą α taške M, kuris nepriklauso tos plokštumos tiesei a'. Vadinasi, a' ir b' yra prasilenkiančios tiesės (remiamės prasilenkiančiųjų tiesių požymiu).

21. Tiesė c kerta tiesę a ir nekerta su tiese a lygiagrečios tiesės b.
Įrodykite, kad b ir c yra prasilenkiančios tiesės.

Sprendimas

Lygiagrečios tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje. Pažymėkime ją raide α.

Tiesė c nėra plokštumoje α. Priešingu atveju ji kirstų tiesę b (remiamės planimetrijoje įrodyta tiesės ir lygiagrečiųjų tiesių susikirtimo teorema).

Gavome, kad tiesė c kerta plokštumą α taške, kuris nepriklauso plokštumos α tiesei b. Vadinasi, b ir c – prasilenkiančios tiesės (remiamės prasilenkiančiųjų tiesių požymiu).

22. Ar yra tiesė, lygiagreti su kiekviena iš dviejų prasilenkiančiųjų tiesių?

Sprendimas

Sakykime, a ir b – prasilenkiančios tiesės ($a \dotdiv b$), $c \parallel a$, $c \parallel b$. Iš $c \parallel a$, $c \parallel b$ išeina, kad $b \parallel a$. Tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

Vadinasi, nėra tiesės, kuri būtų lygiagreti su kiekviena iš dviejų prasilenkiančių tiesių.

23. Įrodykite: jei viena plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią su kita plokštuma, ir kerta tą plokštumą, tai tų plokštumų susikirtimo tiesė yra lygiagreti su pirmąja tiese.

Sprendimas

Sakykime, plokštuma α eina per tiesę a ($a \subset \alpha$), lygiagrečią su plokštuma β ($a \parallel \beta$), ir kerta plokštumą β tiese b ($\alpha \cap \beta = b$). Įrodysime, kad $b \parallel a$.

Dvi plokštumos α tiesės a ir b negali susikirsti, nes tada tiesė a kirstų plokštumą β. Vadinasi, tos tiesės yra lygiagrečios: $b \parallel a$.

24. Tiesė b nelygiagreti su tiese a. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios tiesę a ir lygiagrečios su tiese b, yra vienoje plokštumoje.

Sprendimas

Išnagrinėsime du galimus atvejus:

a) a ir b yra susikertančios tiesės;

b) a ir b yra prasilenkiančios tiesės.

a) Tiesės a ir b nusako vienintelę plokštumą. Pažymėkime ją raide α. Plokštumoje α per kiekvieną tiesės a tašką eina vienintelė tiesė, lygiagreti su tiese b. Kadangi ir erdvėje per kiekvieną tašką eina vienintelė tiesė, lygiagreti su turima tiese, tai visos tiesės, kertančios tiesę a ir lygiagrečios su tiese b, yra plokštumoje α.

b) Pasirinkime tiesės a tašką. Per jį nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese b ($b' \parallel b$). Tiesės a ir b' nusako plokštumą. Toje plokštumoje yra visos tiesės, kertančios tiesę a ir lygiagrečios su tiese b (žr. a atvejį)).

25. Įrodykite, kad per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių eina vienintelė plokštuma, lygiagreti su kita tiese.

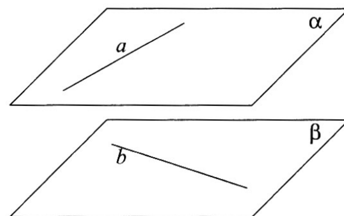
Sprendimas

Nagrinėkime prasilenkiančias tieses a ir b ($a \dot{-} b$). Sakykime, α yra plokštuma, einanti per tiesę a ir lygiagreti su tiese b. Plokštumą α perkirtę plokštuma, einančia per tiesę b, turime gauti tiesę, lygiagrečią su tiese b (žr. 23 uždavinį). Vadinasi, plokštumą, einančią per tiesę a ir lygiagrečią su tiese b, galima gauti kaip plokštumą, einančią per tiesę a ir ją kertančią tiesę, lygiagrečią su tiese b. Tokios plokštumos vienatis išplaukia iš 24 uždavinio.

26. Kiek yra tiesių, einančių per tašką ir kertančių dvi prasilenkiančias tieses?

Sprendimas

Nagrinėkime prasilenkiančias tieses a ir b (9 pav.). Per tiesę a eina vienintelė plokštuma, lygiagreti su tiese b. Per tiesę b eina vienintelė plokštuma, lygiagreti su tiese a. Pažymėkime jas raidėmis α ir β.



9 pav.

Pasirinkime tašką. Pažymėkime jį raide M. Išnagrinėsime galimas taško M padėtis.

1. Taškas M priklauso plokštumai α. Skirsime du atvejus.

a) Taškas M nepriklauso tiesei a. Tada kiekviena tiesė, einanti per tašką M ir kertanti tiesę a, yra plokštumoje α ir

nekerta tiesės b, kuri yra plokštumoje β, lygiagrečioje su plokštuma α.

b) Taškas M priklauso tiesei a. Tada tiesė, einanti per tašką M ir bet kurį tiesės b tašką, kerta abi tieses.

Panašiai išnagrinėtume atvejį, kai taškas M priklauso plokštumai β.

2. Taškas M nepriklauso nė vienai iš plokštumų α ir β.

Tiesės, einančios per tašką M ir kertančios tiesę a, yra jų nusakytoje plokštumoje. Tiesės, einančios per tašką M ir kertančios tiesę b, yra jų nusakytoje plokštumoje. Vadinasi, tiesė, einanti per tašką M ir kertanti abi tieses (a ir b), yra tų plokštumų sankirta – tam tikra vienintelė tiesė, einanti per tašką M.

Susumavę gautus rezultatus, turime: per kiekvieną tiesių a ir b tašką eina be galo daug jas abi kertančių tiesių; per plokštumų α ir β taškus, nepriklausančius tiesėms a ir b, neina nė viena jas abi kertanti tiesė; per kiekvieną plokštumoms α ir β nepriklausantį tašką eina po vieną tiesę, kertančią abi tieses a ir b.

27. Sakykime, kad M yra taškas, per kurį neina tiesė, kertanti prasilenkiančias tieses a ir b. Apibūdinkite visų tokių taškų aibę.

Sprendimas

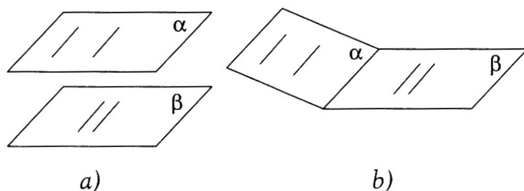
Atsakymą nesunku suformuluoti iš 26 uždavinio sprendimo. Taškų, per kuriuos neina tiesė, kertanti prasilenkiančias tieses, aibę sudaro per tas tieses einančios su kita tiese lygiagrečios plokštumos be tų tiesių taškų.

28. Plokštumos β dvi tiesės yra lygiagrečios su plokštumos α dviem tiesėmis. Kokia gali būti plokštumų α ir β tarpusavio padėtis?

Sprendimas

Jei plokštumos α tiesės yra susikertančios, tai plokštumos α ir β yra lygiagrečios (remiamės dviejų plokštumų lygiagretumo požymiu).

Jei plokštumos α tiesės yra lygiagrečios, tai plokštumos α ir β gali būti ir lygiagrečios (10 pav., a), ir susikertančios (10 pav., b).



10 pav.

29. Dvi tiesės yra lygiagrečios su ta pačia plokštuma. Kokia gali būti tų tiesių tarpusavio padėtis?

Sprendimas

Tos dvi tiesės gali būti susikertančios, lygiagrečios arba prasilenkiančios.

30. Per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių eina plokštuma, lygiagreti su kita tiese. Įrodykite, kad tos plokštumos yra lygiagrečios viena su kita.

Sprendimas

Nagrinėkime prasilenkiančias tieses a ir b.

Per bet kurį tiesės a tašką nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese b: $b' \parallel b$. Tiesės a ir b'

nusako vienintelę plokštumą, einančią per tiesę a ir lygiagrečią su tiese b. Pažymėkime ją raide α.

Per bet kurį tiesės b tašką nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese a: $a' \parallel a$. Tiesės b ir a' nusako vienintelę plokštumą, einančią per tiesę b ir lygiagrečią su tiese a. Pažymėkime ją raide β.

Dvi plokštumos α susikertančios tiesės yra lygiagrečios su plokštumos β dviem tiesėmis ($a \parallel a'$, $b' \parallel b$), todėl tos plokštumos yra lygiagrečios: $\alpha \parallel \beta$ (remiamės dviejų plokštumų lygiagretumo požymiu).

31. Įrodykite, kad plokštumų lygiagretumas yra tranzityvus: jei $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$, tai $\alpha \parallel \gamma$ (α ir γ – skirtingos plokštumos).

Sprendimas

Tarę, kad plokštumos α ir γ turi bendrą tašką, gautume, jog per tą tašką eina dvi plokštumos, lygiagrečios su plokštuma β. Tai prieštarauja lygiagrečios plokštumos vienaties teoremai. Vadinasi, plokštumos α ir γ neturi nė vieno bendro taško, t. y. $\alpha \parallel \gamma$.

3. Tvarkos plokštumoje aksiomos

Tai bene vaizdžiausia kurso dalis, kurią nelengva aprašyti taip, kad būtų galima remtis įrodant teoremas ar sprendžiant uždavinius.

Jau formuojant tiesės trijų taškų aksiomą paaiškinta, kad tuo tiesė (tiesioji linija) išskiriama iš kitų linijų (bet ne visų; tą rodo 15 paveikslas, a) (žr. [2]). Sunkumas dar ir tas, kad minėta aksioma taip retai remiamasi, jog galima abejoti, ar iš viso jos reikia.

Atkarpą apibūdinant kaip figūrą, kurią sudaro du taškai ir visi tarp jų esantys taškai, kyla klausimas: ar tarp tų dviejų taškų yra taškų? Tai kas, kad tiesėje galima pasirinkti kiek norima taškų. Klausimas lieka. Ar toje vietoje (tarp dviejų taškų) yra taškų? Kadangi įsivaizduojama, kad yra, tai atkarpos aksioma taip ir formuluojama.

Aišku, kad atkarpos aksiomos nepakanka. Ar, be atkarpos taškų, tiesėje dar yra taškų? Galima būtų formuluoti dar vieną aksiomą (vėliau ji pateikiama kaip tiesės dalijimo teorema). Čia pateikiamas kitas klausimas: kaip išdėstyti taškai plokštumoje? Aiškiai neužtenka to, kad yra kiek norima taškų, nepriklausančių tiesei. Todėl ir formuluojama plokštumos dalijimo aksioma.

Paskui įrodoma tiesės dalijimo teorema. Jos įrodymas yra pavyzdys to, kaip susiaurinamas teiginys.

Šio skyriaus uždavinių sprendimus pateikiame taip, kaip patogiau spręsti.

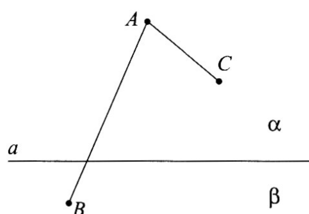
Uždaviniai

32. Kiek pusplokštumių yra plokštumoje?

Sprendimas

Tiesė plokštumą padalija į dvi pusplokštumes (remiamės plokštumos dalijimo aksioma). Kadangi plokštumoje yra be galo daug tiesių (žr. 3 uždavinį), tai plokštumoje yra be galo daug pusplokštumių.

34. Plokštumos taškai A, B, C nepriklauso jos tiesei a. Atkarpa AB kerta tiesę a, o atkarpa AC jos nekerta. Ar atkarpa BC kerta tiesę a?



11 pav.

Sprendimas

Tiesė a padalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Pažymėkime jas raidėmis α ir β (11 pav.).

Kadangi atkarpa AB kerta tiesę a, tai taškai A ir B priklauso skirtingoms pusplokštumėms. Sakykime, taškas A priklauso pusplokštumei α, taškas B – pusplokštumei β.

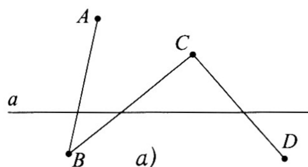
Kadangi atkarpa AC nekerta tiesės a ir taškas A priklauso pusplokštumei α, tai ir taškas C priklauso pusplokštumei α.

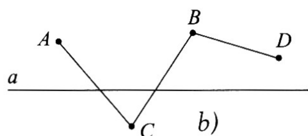
Gavome, kad taškai B ir C priklauso skirtingoms tiesės a ribojamoms pusplokštumėms. Vadinasi, atkarpa BC kerta tiesę a.

35. Plokštumos taškai *A*, *B*, *C*, *D* nepriklauso jos tiesei *a*.

a) Atkarpos *AB*, *BC* ir *CD* kerta tiesę *a*. Ar atkarpa *AD* kerta tiesę *a*?

b) Atkarpos *AC* ir *BC* kerta tiesę *a*, o atkarpa *BD* jos nekerta. Ar atkarpa *AD* kerta tiesę *a*?



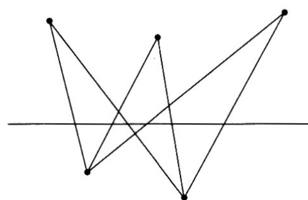


12 pav.

Sprendimas

Samprotaudami taip, kaip spręsdami 34 uždavinį, gautume, kad atveju a) – kerta (12 pav., *a*), atveju b) – nekerta (12 pav., *b*).

36. Trys taškai yra vienoje tiesės pusėje, du – kitoje. Kiekvieni du taškai sujungti atkarpa. Kiek atkarpų kerta tą tiesę? Kiek atkarpų jos nekerta?



13 pav.

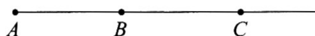
Sprendimas

Tiesę kerta kiekviena atkarpa, jungianti vienos pusplokštumės tašką su kitos pusplokštumės tašku (13 pav.). Tokių atkarpų yra 3 · 2, t. y. šešios.

Kadangi iš viso yra $C_5^2 = 10$ atkarpų, tai likusios keturios atkarpos tiesės nekerta.

37. Įrodykite: bet kuris spindulio taškas, nesutampantis su spindulio pradžia, yra tarp spindulio pradžios ir kurio nors to spindulio taško (t. y. įrodykite, kad spindulį galima tęsti).

Sprendimas



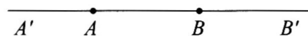
14 pav.

Nagrinėkime spindulį, kurio pradžia yra taškas *A* (14 pav.). Pasirinkime to spindulio tašką (kad yra spinduliui priklausančių taškų, išplaukia iš tiesės dalijimo teoremos). Pažymėkime jį raide *B*.

Taškas *B* padalija tiesę į du spindulius. Pasirinkime spindulį, kuriam nepriklauso taškas *A*. Sakykime, *C* – to spindulio taškas. Taškai *A* ir *C* priklauso skirtingiems spinduliams, kurių pradžia yra taškas *B*. Vadinasi, taškas *B* yra tarp taškų *A* ir *C*.

38. Išnagrinėkite poaibius, į kuriuos tiesę padalija du jos taškai.

Sprendimas



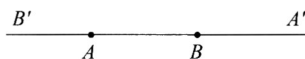
15 pav.

Nagrinėkime tiesę ir du jos taškus. Pažymėkime juos raidėmis *A* ir *B* (15 pav.).

Taškas *A* padalija tiesę į du spindulius: *AA'* ir *AB'* (remiamės tiesės dalijimo teorema). Taškas *B* padalija spindulį *AB'* į atkarpą *AB* ir spindulį *BB'* (žr. 39 uždavinį). Vadinasi, tiesę du taškai *A* ir *B* padalija į du spindulius ir jų pradžios taškus jungiančią atkarpą *AB*.

39. Įrodykite, kad spindulio taškas, nesutampantis su spindulio pradžia, padalija spindulį į atkarpą ir spindulį.

Sprendimas



16 pav.

Nagrinėkime spindulį, kurio pradžia yra taškas A, ir to spindulio tašką B, nesutampantį su tašku A (16 pav.).

Nagrinėkime tiesę AB. Sakykime, M – bet kuris jos taškas, nesutampantis nė su vienu iš taškų A ir B.

Išnagrinėkime tris galimas, viena kitą išskiriančias taškų A, B ir M tarpusavio padėtis.

a) Jei taškas A yra tarp taškų M ir B, tai taškas M priklauso nagrinėjamo spindulio papildomam spinduliui AB'.

b) Jei taškas M yra tarp taškų A ir B, tai jis yra atkarpos AB taškas.

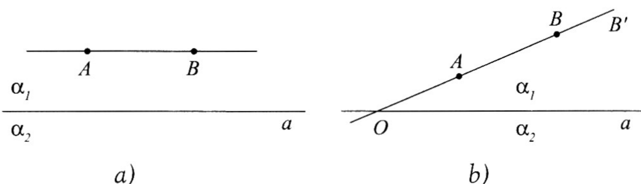
c) Jei taškas B yra tarp taškų A ir M, tai taškas M yra spindulio BA papildomo spindulio BA' taškas.

Vadinasi, nagrinėjamą spindulį AB sudaro atkarpa AB ir spindulys BA'.

33. Atkarpa jungia du pusplokštumės taškus, nepriklausančius jos kraštui. Įrodykite, kad joks tos atkarpos taškas nepriklauso papildomai pusplokštumei.

Sprendimas

Sakykime, pusplokštumės kraštas yra tiesė a, jos ribojamos pusplokštumės – α_1 ir α_2, abu taškai A ir B priklauso pusplokštumei α_1.



17 pav.

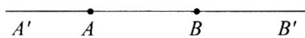
Jei tiesė AB nekerta tiesės a (17 pav., *a*), tai ji ir tiesė a neturi nė vieno bendro taško. Tada ir joks atkarpos AB taškas nepriklauso tiesei a, taigi pusplokštumėje α_2 nėra nė vieno atkarpos AB taško.

Sakykime, tiesė AB kerta tiesę a. Susikirtimo tašką pažymėkime raide O (17 pav., *b*). Kadangi taškai A ir B priklauso tai pačiai pusplokštumei, tai taškas O nėra tarp taškų A ir B. Tarkime, kad taškai pažymėti taip, jog taškas A yra tarp taškų O ir B.

Taškas A spindulį OB (jis yra pusplokštumėje α_1) padalija į atkarpą OA ir spindulį AB (žr. 38 uždavinį). Taškas B spindulį AB padalija į atkarpą AB ir spindulį BB'. Taigi atkarpa AB, kaip spindulio OB dalis, yra pusplokštumėje α_1. Vadinasi, joks tos atkarpos taškas nepriklauso papildomai pusplokštumei α_2.

40. Įrodykite, kad atkarpa yra dviejų spindulių sankirta.

Sprendimas



18 pav.

Spindulį AB' (18 pav.) sudaro atkarpa AB ir spindulys BB' (žr. 39 uždavinį), spindulį BA' – atkarpa BA ir spindulys AA'. Kadangi spinduliai BB' ir AA' neturi bendrų taškų, tai spindulių AB' ir BA' sankirta (bendra dalis) ir yra atkarpa AB.

4. Erdvės dalijimas

Susiaurinę plokštumos dalijimo aksiomą, įrodėme tiesės dalijimo teoremą.

Tą aksiomą išplečiant, įrodoma erdvės dalijimo teorema.

Pagrindinės mokyklos kurse lygiagretusis projektavimas pateikiamas kaip būdas erdvinėms figūroms vaizduoti plokštumoje.

Nors kaip konkretus teoremų įrodymo būdas lygiagretusis projektavimas neišskirtas, aptariamoje knygelėje [2] jis pritaikomas įrodant erdvės dalijimo teoremą. Beje, tokio įrodymo elementų yra ir įrodant tiesės dalijimo teoremą. Dėl to minėtoje knygelėje ir pateikti tiesės lygiagretaus projektavimo į tiesę plokštumoje ir erdvėje elementai.

Uždaviniai

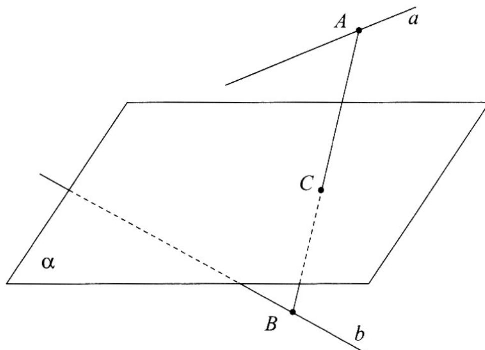
41. Per atkarpos, jungiančios dviejų prasilenkiančių tiesių taškus, vidaus tašką eina plokštuma, lygiagreti su kiekviena iš tų tiesių. Įrodykite, kad tos tiesės yra skirtingose minėtos plokštumos pusėse.

Sprendimas

Nagrinėkime prasilenkiančias tieses a ir b. Sakykime, A ir B – tiesių a ir b taškai, C – atkarpos AB vidaus taškas, α – plokštuma, einanti per tašką C ir lygiagreti su kiekviena iš tiesių a ir b (19 pav.). Kadangi tiesė a yra lygiagreti su plokštuma α, tai jokius du tiesės a taškus jungianti atkarpa ir plokštuma α neturi nė vieno bendro taško. Vadinasi, visi tiesės a taškai (taigi ir tiesė a) yra vienoje plokštumos α pusėje.

Taip pat gautume, kad tiesė b irgi yra vienoje plokštumos α pusėje.

Kadangi atkarpa AB kerta plokštumą α, tai tiesės a ir b yra skirtingose plokštumos α pusėse.



19 pav.

5. Paprasčiausios plokščiosios figūros

Pirmiausia apibrėžiama iškiloji figūra, įrodoma svarbi iškilųjų figūrų sankirtos teorema. Tai tinka ir erdvinėms figūroms.

Pagrindinės mokyklos matematikos kurse susipažįstama su įvairiomis figūromis: ir plokščiosiomis, ir erdvinėmis. Tačiau su dauguma iš jų susipažįstama tik „iš matymo", nepateikiant konkrečių apibrėžimų ar nors konkretesnių paaiškinimų. Išsamesniam kursui to nepakanka. (Ne visi tą patį ir ne visi vienodai mato.)

Kadangi aptariamoje knygelėje daugiau vietos skirta plokščiosioms figūroms, jos daugiausia ir aptarinėjamos.

Viena iš tokių figūrų yra kampas. Čia juo laikoma ne figūra, kurią sudaro du iš vieno taško išeinantys spinduliai, ir ne jų apribota plokštumos dalis (yra dvi dalys), o kampas kaip dviejų pusplokštumių sankirta, t. y. iškilasis kampas (aišku, kiekvieną kartą to atskirai nepabrėžiant).

Dar aptartos paprastoji laužtė bei paprastoji uždaroji laužtė, neretai vadinama daugiakampiu. Toliau, nors to atskirai nepabrėžiant, nagrinėjami iškilieji daugiakampiai – su uždarąja laužte susietų pusplokštumių sankirta.

Uždaviniai

42. Kiek įstrižainių galima nubrėžti iš vienos n-kampio viršūnės? Kiek įstrižainių turi n-kampis?

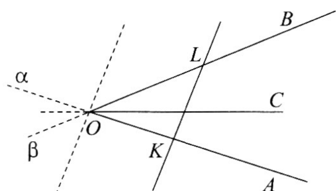
Sprendimas

Pasirinkime n-kampio viršūnę. Lieka $n - 1$ viršūnė. Dvi iš jų yra gretimos pasirinktai viršūnei. Vadinasi, iš vienos n-kampio viršūnės galima nubrėžti $n - 3$ įstrižaines.

Iš vienos viršūnės nubrėžtų įstrižainių skaičių $n - 3$ padauginę iš viršūnių skaičiaus n, gausime dvigubą visų įstrižainių skaičių. Vadinasi, n-kampis turi $\frac{1}{2}n(n-3)$ įstrižaines.

42*a*. Išspręsime vieną papildomą uždavinį.

Nagrinėkime dvi susikertančias tieses (20 pav.). Jos nusako keturis kampus. Pasirinkime vieną iš jų, pavyzdžiui, kampą AOB, kuris yra pusplokštumių α ir β sankirta.



20 pav.

Kampe esantis spindulys, kurio pradžia yra kampo viršūnė ir kuris nesutampa su kampo kraštine, vadinamas spinduliu, esančiu tarp kampo kraštinių. Pavyzdžiui, spindulys OC yra tarp kampo AOB kraštinių.

Kampo AOB kraštinėse pasirinkime po tašką, nesutampantį su kampo viršūne. Pažymėkime juos raidėmis K ir L. Nubrėžkime tiesę KL bei tiesę, einančią per tašką O ir

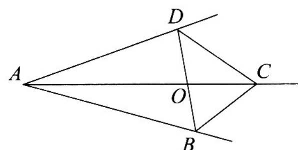
lygiagrečią su tiese *KL*. Kadangi tiesė *OC* kerta nubrėžtą tiesę, tai ji kerta ir su ja lygiagrečią tiesę *KL*. Kur yra tiesių *OC* ir *KL* susikirtimo taškas? Jis yra tik ten, kur yra ir tiesės *OC*, ir tiesės *KL* taškų. Tokia vieta yra tik kampas *AOB*.

Taigi įrodėme teiginį, kurį trumpai suformuluosime šitaip: spindulys, esantis tarp kampo kraštinių, kerta kiekvieną atkarpą, jungiančią kampo kraštinių taškus.

43. Įrodykite, kad iškilojo keturkampio įstrižainės susikerta.

Sprendimas

Nagrinėkime iškiląjį keturkampį *ABCD* (21 pav.). Kadangi keturkampis *ABCD* yra iškilasis, tai jis yra tiesės *AB* ribojamos pusplokštumės, kuriai priklauso taškai *D* ir *C*, bei tiesės *AD* ribojamos pusplokštumės, kuriai priklauso taškai *B* ir *C*, sankirtoje. Iš to gauname, kad spindulys *AC* yra tarp kampo *BAD* kraštinių, o atkarpa *BD* – atkarpa, jungianti to kampo kraštinių taškus. Žinome (žr. 42*a* uždavinį), kad spindulys *AC* kerta atkarpą *BD*. Susikirtimo tašką pažymėkime raide *O*.



21 pav.

Panašiai įrodytume, kad taškas *O* yra spindulio *BD* ir atkarpos *AC* susikirtimo taškas.

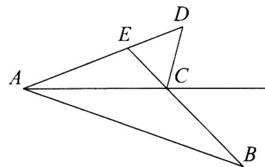
Palyginę gautus rezultatus, įsitikiname, kad taškas *O* yra atkarpų *AC* ir *BD* (keturkampio įstrižainių) susikirtimo taškas.

44. Įrodykite, kad keturkampio (iškilojo ar neiškilojo) bent dvi ne gretimos viršūnės yra per kitas dvi viršūnes einančios tiesės skirtingose pusėse.

Sprendimas

Nagrinėkime neiškiląjį keturkampį *ABCD*.

Neiškilasis keturkampis nėra vienoje per kurią nors jo kraštinę einančios tiesės pusėje. Sakykime, jis nėra tiesės *BC* pusėje (22 pav.). Tada taškai *A* ir *D* yra skirtingose tiesės *BC* pusėse, todėl tiesė *BC* kerta atkarpą *AD*. Susikirtimo tašką pažymėkime raide *E*.



22 pav.

Remdamiesi tiesės trijų taškų aksioma, turime išsiaiškinti, kuris iš trijų teiginių:

a) taškas *C* yra tarp taškų *B* ir *E*;

b) taškas *B* yra tarp taškų *C* ir *E*;

c) taškas *E* yra tarp taškų *B* ir *C* yra teisingas.

Pradėkime nuo atvejo, kuris pagal paveikslą atrodo teisingas.

a) Šiuo atveju taškai *B* ir *E* yra skirtingose tiesės *AC* pusėse, nes atkarpa *BE* kerta tiesę *AC* (taške *C*).

Taškai *D* ir *E* yra toje pačioje tiesės *AC* pusėje, nes atkarpa *DE* nekerta tiesės *AC*.

Iš gautų dviejų išvadų gauname, kad taškai *B* ir *D* yra skirtingose tiesės *AC* pusėse. Vadinasi, taškai *B* ir *D* (negretimos keturkampio viršūnės) yra skirtingose tiesės *AC* (einančios per kitas dvi viršūnes) pusėse.

Kadangi iš teiginių a) – c) tik vienas yra teisingas (žr. tiesės trijų taškų aksiomą), o tokį jau radome, tai galime manyti, kad neiškilojo keturkampio atveju uždavinys išspręstas.

Bet kurios dvi priešingos iškilojo keturkampio viršūnės yra skirtingose per kitas dvi viršūnes einančios tiesės pusėse (žr. 43 uždavinį).

6. Plokštumos vektoriai

Pirmiausia primenamas iš žemesniųjų klasių žinomas „buitinis“ lygių figūrų apibrėžimas: jeigu dvi plokštumos figūras galima uždėti vieną ant kitos taip, kad jos sutaptų (pastumiant, pasukant, apverčiant), tai sakoma, kad figūros yra lygios.

Kadangi praktiškai tai padaryti galima dažniausiai sutapatinant iš popieriaus lapo iškirptas figūras, tai tenka aiškintis, kokios figūros savybės išlieka atliekant tuos fizinius veiksmus, kad paskui pagal jas galėtume teigti, jog tos figūros yra lygios.

Pradedama nuo pirmuoju paminėto pastūmimo.

Pirmiausia kyla klausimai: kuria kryptimi ir kiek stumsime, ar vienodai judės pavienės figūros dalys (taškai).

Tam pavaizduoti tinka orientuotoji atkarpa.

Bet tai tik pradžia. Stumdami, pavyzdžiui, palei liniuotės kraštą, kampainį, įsivaizduojame, kad visi jo taškai stumiami vienodai (kampainis nesideformuoja, nesubyra). Taigi tenka paaiškinti, kokios orientuotosios atkarpos yra lygios. Tas apibrėžimas – geometrinis, panaudojant lygiagretainį. Tačiau natūralu, kad tą patį postūmį galima nusakyti ir kitomis orientuotosiomis atkarpomis. O tos atkarpos gali būti ir vienoje tiesėje ir joms palyginti neturėsime lygiagretainio. Tam formuluojama orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksioma.

Pagaliau nereikia pamiršti, ko tokiu postūmiu siekėme: gauti orientuotąją atkarpą, kurią laikytume lygia pradinei orientuotajai atkarpai. Tai išreiškiame lygiagrečiojo postūmio aksioma.

Taip prieiname ir prie vektoriaus sąvokos.

Kad tą patį lygiagretųjį postūmį galėtume taikyti ir kitoms figūroms palyginti, nagrinėjama visų vienai orientuotajai atkarpai, pavyzdžiui, $\overline{AB}$, lygių orientuotųjų atkarpų aibė. Ji ir vadinama vektoriumi $\overrightarrow{AB}$. Galime sakyti, kad rodyklė viršuje rodo, jog tą orientuotąją atkarpą galime pakeisti bet kuria jai lygia orientuotąja atkarpa, kitaip – tą vektorių galima atidėti iš bet kurio taško.

Taigi atsiranda abipusis ryšys tarp lygiagrečiųjų postūmių ir vektorių, kuris svarbus tolesniame kurse.

Šito jau pakanka svarbiai visam kursui Talio teoremai įrodyti. Kad būtų trumpiau, lygios orientuotosios atkarpos atidedamos nuo kampo viršūnės (nesunku tai pritaikyti ir bendresniems atvejams).

Atsiradus galimybei orientuotąją atkarpą atidėti jos tiesėje arba bet kurioje su ja lygiagrečioje tiesėje, galima pradėti kalbėti apie tiesės ar jai lygiagrečių atkarpų matavimą.

Įsivaizduojamas norimas atkarpų ilgių savybes išreiškia 4 atstumo aksiomos. Įrodoma [3], kad tų aksiomų reikalavimus galima įvykdyti. Čia tas nenagrinėjama. Šie rezultatai panaudojami sprendžiant tolimesnius uždavinius.

Pavyzdžiui, įrodyti vadinamąją apibendrintąją Talio teoremą.

Panašiai formuojama ir krypties sąvoka. Pridėsime, kad kryptį nusako orientuotoji atkarpa, gal tiksliau – spindulys. Išskiriami vienakrypčiai ir priešpriešiniai spinduliai.

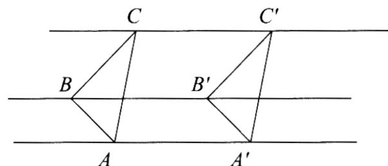
Aptarsime šiame skyriuje pateiktas aksiomas. Pateiksime bendriausią Talio teoremos įrodymą.

Orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksioma

1. Vietoj orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksiomos dažnai formuluojamas šitoks teiginys: jei AA', BB', CC' yra trys lygiagrečios tiesės ir $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, tai ir $A'C' \parallel AC$ (23 pav.). Tai konkretus orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksiomos atvejis, kai atkarpos AA', BB', CC' yra trijose (skirtingose) tiesėse. Tai ir konkretus Dezargo teoremos atvejis. Jo įrodyti, remiantis tik įprastomis planimetrijos aksiomomis, negalima [1].

Įrodyti galima remiantis stereometrijos aksiomomis (žr. 9 skyriaus aptarimą).

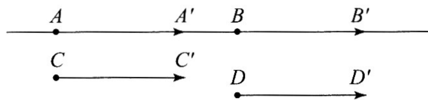
Įsitikinsime, kad tais atvejais, kai orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksiomoje minimos trys atkarpos nėra trijose lygiagrečiose tiesėse, jų lygumo tranzityvumą galima įrodyti remiantis tuo atveju, kai atkarpos yra trijose lygiagrečiose tiesėse. Tam pirmiausia aptarsime vienos tiesės orientuotųjų atkarpų lygumą.



23 pav.

2. Dvi orientuotosios atkarpos, esančios vienoje tiesėje, laikomos lygiomis, kai jos yra lygios kuriai nors toje tiesėje nesančiai orientuotajai atkarpai. 24 paveiksle atkarpos AA' ir BB' yra vienoje tiesėje, atkarpa CC' nėra toje tiesėje ir $\overline{AA'} = \overline{CC'}$, $\overline{BB'} = \overline{CC'}$, todėl $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Pasirinkime orientuotajai atkarpai $\overline{CC'}$ lygią orientuotąją atkarpą $\overline{DD'}$ $\left(\overline{DD'} = \overline{CC'}\right)$, nesančią nei tiesėje $AA'(BB')$, nei tiesėje CC'.



24 pav.

Iš $\overline{AA'} = \overline{CC'}$ ir $\overline{DD'} = \overline{CC'}$, remdamiesi trijose tiesėse esančių orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumu, gauname, kad $\overline{AA'} = \overline{DD'}$.

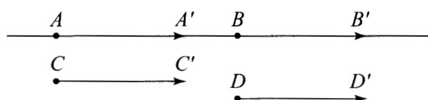
Taip pat iš $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ ir $\overline{DD'} = \overline{CC'}$ gauname, kad $\overline{BB'} = \overline{DD'}$.

Iš lygybių $\overline{AA'} = \overline{DD'}$, $\overline{BB'} = \overline{DD'}$, remdamiesi vienoje tiesėje esančių orientuotųjų atkarpų lygumo apibrėžimu, gauname, kad $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Vadinasi, vienoje tiesėje esančių orientuotųjų atkarpų lygumo apibrėžime toje tiesėje nesančią „pagalbinę“ orientuotąją atkarpą ($\overline{CC'}$; 24 pav.) galima pakeisti jai lygia orientuotąja atkarpa $\left(\overline{DD'}\right)$.

3. Remiantis orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksioma, kai tos atkarpos yra trijose lygiagrečiose tiesėse, orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumą galima įrodyti.

Išnagrinėsime pavyzdį. Sakykime, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ ir atkarpos AA' ir BB' yra vienoje tiesėje (25 pav.). Įrodysime, kad $\overline{AA'} = \overline{CC'}$.

Kadangi $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, tai jos yra lygios jų tiesėje nesančiai orientuotajai atkarpai. Pažymėkime ją $\overline{DD'}$ $\left(\overline{AA'} = \overline{DD'}, \overline{BB'} = \overline{DD'}\right)$. Remdamiesi tuo,



25 pav.

ką jau įrodėme, galime manyti, kad atkarpa DD' nėra nei tiesėje AA' (BB'), nei tiesėje CC'.

Tada iš $\overline{CC'} = \overline{BB'}$, $\overline{BB'} = \overline{DD'}$ gauname, kad $\overline{CC'} = \overline{DD'}$;

iš $\overline{AA'} = \overline{DD'}$, $\overline{DD'} = \overline{CC'}$ gauname, kad $\overline{AA'} = \overline{CC'}$.

Panašiai nagrinėtume atvejus, kai sutampa kitos dvi tiesės (dvi galimybės) arba visos trys tiesės.

Lygiagrečiojo postūmio aksioma

Lygiagrečiojo postūmio aksiomos galėtų ir nebūti. Tą teiginį galima įrodyti. Įrodysime.

Teorema

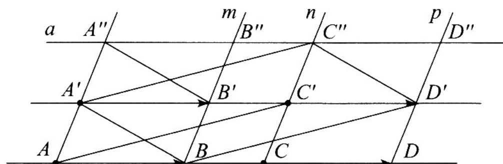
Jei $\overline{AB} = \overline{CD}$, tai $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Įrodymas

Nagrinėkime du galimus atvejus:
atkarpos AB ir CD nėra vienoje tiesėje;
atkarpos AB ir CD yra vienoje tiesėje.

1. Kadangi atkarpos AB ir CD nėra vienoje tiesėje, tai $ABDC$ – lygiagretainis (remiamės lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimu). Tada ir $ACDB$ – lygiagretainis, taigi $\overline{AC} = \overline{BD}$.

2. Sakykime, lygios orientuotosios atkarpos $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ yra vienoje tiesėje. Tada, remiantis vienos tiesės lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimu, kiekviena jų lygi kuriai nors orientuotajai atkarpai $\overline{A'B'}$, nesančiai tiesėje AB (CD): $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{CD} = \overline{A'B'}$ (26 pav.).



26 pav.

Iš taško A' atidėkime orientuotąją atkarpą $A'A''$, lygią orientuotajai atkarpai $\overline{AA'}$: $\overline{A'A''} = \overline{AA'}$. Per tašką A'' nubrėžkime tiesę a, lygiagrečią su tiese AB: $a \parallel AB$. Tada $a \parallel A'B'$ (tiesių lygiagretumo tranzityvumas).

Per taškus B, C, D nubrėžkime tieses m, n, p, lygiagrečias su tiese AA': $m \parallel AA'$, $n \parallel AA'$, $p \parallel AA'$.

Kadangi $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, tai $BB' \parallel AA'$, taigi tiesės m ir tiesės $A'B'$ susikirtimo taškas yra B'.

Tiesių n, p ir tiesės AA' susikirtimo taškus pažymėkime C', D'. Tiesių m, n, p ir tiesės a susikirtimo taškus pažymėkime B'', C'', D''. Kadangi $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$ (atidėjome), $\overline{A'A''} = \overline{C'C''}$ (pagal apibrėžimą), tai $\overline{AA'} = \overline{C'C''}$ (lygumo tranzityvumas). Tada $\overline{AC'} = \overline{A'C''}$ (1 atvejis).

Kadangi $\overline{AB} = \overline{CD}$ (pagal sąlygą), $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ (pagal apibrėžimą), tai $\overline{AB} = \overline{C'D'}$ (lygumo tranzityvumas). Tada $\overline{AC'} = \overline{BD'}$ (1 atvejis).

Kadangi $\overline{AC'} = \overline{A'C''}$, $\overline{AC'} = \overline{BD'}$ (įrodėme), tai $\overline{BD'} = \overline{A'C''}$ (lygumo tranzityvumas). Tada $\overline{BA'} = \overline{D'C''}$ (1 atvejis).

Kadangi $\overline{A'A''} = \overline{AA'}$ (atidėjome), $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ (pagal apibrėžimą), tai $\overline{A'A''} = \overline{BB'}$.

Iš $\overline{BA'} = \overline{B'A''}$ ir $\overline{BA'} = \overline{D'C''}$ (įrodėme) gauname, kad $\overline{B'A''} = \overline{D'C''}$ (lygumo tranzityvumas), todėl $\overline{B'D'} = \overline{A''C''}$ (1 atvejis).

Iš $\overline{A''C''} = \overline{AC}$ (pagal apibrėžimą) ir $\overline{B'D'} = \overline{A''C''}$ (įrodėme) gauname, kad $\overline{AC} = \overline{B'D'}$ (lygumo tranzityvumas).

Tačiau $\overline{B'D'} = \overline{BD}$ (pagal apibrėžimą). Pagaliau iš $\overline{AC} = \overline{B'D'}$ (įrodėme) ir $\overline{B'D'} = \overline{BD}$ gauname, kad $\overline{AC} = \overline{BD}$ (lygumo tranzityvumas).

Talio teorema

Talio teoremą įrodysime bendruoju atveju.

Kai orientuotosios atkarpos $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ yra lygios $\left(\overline{AB} = \overline{CD}\right)$ arba kai jos yra priešingos $\left(\overline{AB} = \overline{DC}\right)$, sakysime, kad pačios atkarpos yra lygios ir rašysime $AB = CD$.

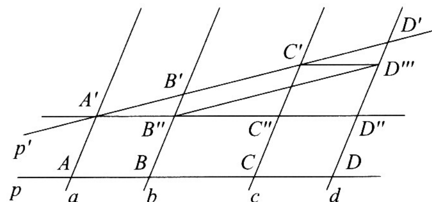
Teorema

Jei tiesėje atidėtos lygios atkarpos ir per jų galus einančios lygiagrečios tiesės kerta kitą tiesę, tai jos ir toje tiesėje iškerta lygias atkarpas.

Įrodymas

Sakykime, tiesėje p atidėtos dvi lygios atkarpos: $AB = CD$. Tarkime, lygiagrečios tiesės a, b, c, d, einančios per taškus A, B, C, D, tiesę p' kerta taškuose A', B', C', D' (27 pav.). Įrodysime, kad $A'B' = C'D'$.

Per tašką A' nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese p. Jos ir tiesių b, c, d susikirtimo taškus pažymėkime B'', C'', D''. Per tašką C' nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese p. Jos ir tiesės d susikirtimo tašką pažymėkime D'''.



27 pav.

Tada $\overline{A'B''} = \overline{AB}$, $\overline{C'D'''} = \overline{CD}$ (pagal apibrėžimą).

Kadangi $\overline{AB} = \overline{CD}$, tai $\overline{A'B''} = \overline{C'D'''}$ (lygumo tranzityvumas). Iš čia gauname, kad $\overline{A'C'} = \overline{B''D'''}$ (lygiagrečiojo postūmio aksioma), taigi $A'C' \parallel B''D'''$. Vadinasi, $\overline{B''D'''} = \overline{B'D'}$.

Iš $\overline{A'C'} = \overline{B''D'''}$ ir $\overline{B''D'''} = \overline{B'D'}$ gauname, kad $\overline{A'C'} = \overline{B'D'}$ (lygumo tranzityvumas), o iš čia – $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ (lygiagrečiojo postūmio aksioma).

Remdamiesi atkarpų lygumo tranzityvumu, įrodytume, kad teiginys teisingas ir tada, kai atidėta daugiau atkarpų.

Atstumo aksiomos

Viena iš Eukleido geometrijos, pagal Eukleido „Pradmenis“, spragų buvo tolydumo aksiomų stoka [1]. Šią spragą užpildė D. Hilbertas: pateikė matavimo aksiomą, arba Archimedo

aksiomą, ir tiesinio pilnumo aksiomą [1]. Tiesinio pilnumo aksiomos formuluotė yra ilga ir neakivaizdi, ją sunku taikyti kitiems klausimams spręsti, todėl ji dažniausiai keičiama Kantoro aksioma [1]. Remdamiesi tomis aksiomomis, galime apibrėžti atkarpos ilgį ir išspręsti atvirkštinį uždavinį – kiekvienam realiajam skaičiui rasti atkarpą, kurios ilgis (kai pasirinktas ilgio vienetas) yra tas skaičius. Tuo grindžiamas labai svarbus geometrijai koordinačių metodas.

Minėtų atkarpos ilgio radimo ir jam atvirkštinio uždavinio sprendimai nėra paprasti, todėl aptariamoje knygelėje [2] pasirinktas kitas kelias: tariama, kad pasirinkus atkarpų matavimo vienetą kiekvieną atkarpą atitinka tam tikras skaičius (atkarpos ilgis), ir atvirkščiai; be to, atkarpos ilgis tenkina tam tikras sąlygas (jos vadinamos atstumo aksiomomis). Galimybė išpildyti atstumo aksiomų reikalavimus ir kaip tai daroma išnagrinėta [3]. Ten įrodyta, kad iš atstumo aksiomų išplaukia Archimedo ir Kantoro aksiomų teiginiai.

Uždaviniai

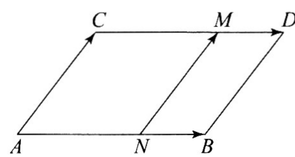
45. Lygios orientuotosios atkarpos $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ nėra vienoje tiesėje.

a) Įrodykite, kad kiekvieną atkarpos CD tašką galima gauti atkarpos AB tašką pastūmus per orientuotąją atkarpą, lygią orientuotajai atkarpai $\overline{AC}$.

b) Per kokią orientuotąją atkarpą reikia pastumti atkarpą CD (kiekvieną jos tašką), norint gauti atkarpą AB?

Sprendimas

a) Pasirinkime atkarpos CD tašką. Pažymėkime jį raide M (28 pav.). Per tašką M nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese AC. Jos ir tiesės AB susikirtimo tašką pažymėkime raide N. Kadangi keturkampis $NMCA$ yra lygiagretainis, tai $\overline{NM} = \overline{AC}$ (remiamės ne vienoje tiesėje esančių lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimu). Taigi įsitikinome, kad kiekvieną atkarpos CD tašką (M) galima gauti atitinkamą atkarpos AB tašką (N) pastūmus per orientuotąją atkarpą $\overline{NM}$, lygią orientuotajai atkarpai $\overline{AC}$.



28 pav.

b) Aišku, kad norint gauti atkarpą AB, atkarpą CD reikia pastumti per orientuotąją atkarpą, lygią orientuotajai atkarpai $\overline{CA}$.

46. Ar bent vienas iš tiesės taškų A, B, C yra tarp kitų dviejų, kai:

a) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 2$ cm;

b) $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 2$ cm;

c) $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 6$ cm?

Sprendimas

a) Kadangi $AB = AC + CB$, tai taškas C yra tarp taškų A ir B. (Rėmėmės atstumo simetriškumu (2 aksioma) ir adityvumu (3 aksioma).)

b) Kadangi $AC = AB + BC$, tai taškas B yra tarp taškų A ir C.

c) Kadangi nė vienas iš skaičių 5, 4, 6 nėra lygus kitų dviejų skaičių sumai, tai nė vienas iš taškų A, B, C nėra tarp kitų dviejų.

47. Kokia tiesės taškų A, B, C tarpusavio padėtis, kai:
a) $AB + BC = AC$; b) $AC + BC = AB$; c) $CA = CB - AB$?

Sprendimas

a) Remdamiesi atstumo adityvumu, gauname, kad taškas B yra tarp taškų A ir C.

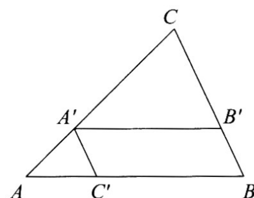
b) Remdamiesi atstumo simetriškumu, gauname lygybę $AC + CB = AB$. Vadinasi, taškas C yra tarp taškų A ir B.

c) Duotą lygybę pertvarkę į lygybę $CA + AB = CB$, gauname, kad taškas A yra tarp taškų B ir C.

48. Tiesė, lygiagreti su trikampio ABC kraštine AB, nuo jo nukerta trikampį $A'B'C$. Įrodykite, kad trikampių ABC ir $A'B'C$ visų atitinkamų kraštinių (AC ir $A'C$, BC ir $B'C$, AB ir $A'B'$) santykis yra tas pats.

Sprendimas

Per tašką A' nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese BC. Jos ir tiesės AB susikirtimo tašką pažymėkime C' (29 pav.).



29 pav.

Tiesėms CA ir CB bei jas kertančioms lygiagrečioms tiesėms AB ir $A'B'$ pritaikę apibendrintąją Talio teoremą, gauname:

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}.$$

Tiesėms AC ir AB bei jas kertančioms lygiagrečioms tiesėms BC ir $C'A'$ pritaikę apibendrintąją Talio teoremą, gauname:

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{AB}{C'B}.$$

Kadangi $C'B = A'B'$ (kaip lygiagretainio priešingosios kraštinės), tai iš parašytų lygių santykių gauname:

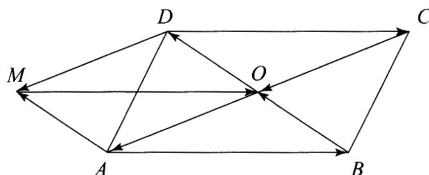
$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

49 uždavinį patogiau spręsti atlikus 53 ir 54 uždavinius. Todėl tų uždavinių sprendimus čia ir pateikiame.

53. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainės susikerta, o susikirtimo taškas kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.

Sprendimas

Žinome, kad lygiagretainio (kaip iškilojo keturkampio) įstrižainės susikerta (žr. 43 uždavinį). Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime raide O (30 pav.).



30 pav.

Remdamiesi lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimu, turime, kad $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Sudarykime lygiagretainį $DCOM$. Tada $\overline{DC} = \overline{MO}$, $\overline{DM} = \overline{CO}$.

Taškus A ir M sujunkime atkarpa. Tada iš $\overline{AB} = \overline{DC}$ ir $\overline{DC} = \overline{MO}$, remdamiesi orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksioma, gauname, kad $\overline{AB} = \overline{MO}$.

Iš čia, remdamiesi lygiagrečiojo postūmio aksioma, gauname, kad $\overline{AM} = \overline{BO}$, todėl $AM \parallel BO$.

Dabar nesunku įsitikinti, kad keturkampis $ODMA$ yra lygiagretainis. Vadinasi, $\overline{OD} = \overline{AM}$, $\overline{OA} = \overline{DM}$.

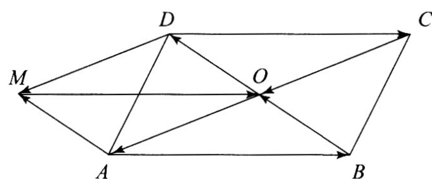
Tada

iš $\overline{OA} = \overline{DM}$ ir $\overline{DM} = \overline{CO}$ gauname, kad $\overline{CO} = \overline{OA}$;

iš $\overline{OD} = \overline{AM}$ ir $\overline{AM} = \overline{BO}$ gauname, kad $\overline{BO} = \overline{OD}$.

Taigi taškas O atkarpas AC ir BD dalija pusiau.

54. Įrodykite lygiagretainio požymį pagal įstrižaines: jei keturkampio įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną įstrižainę dalija pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.



31 pav.

Sprendimas

Nagrinėkime keturkampį $ABCD$, kurio $\overline{CO} = \overline{OA}$, $\overline{BO} = \overline{OD}$ (31 pav.).

Sudarykime lygiagretainį $DCOM$. Tada $\overline{DC} = \overline{MO}$, $\overline{DM} = \overline{CO}$.

Taškus A ir M sujunkime atkarpa.

Iš $\overline{CO} = \overline{OA}$ ir $\overline{DM} = \overline{CO}$ gauname, kad $\overline{AO} = \overline{MD}$ (remiamės orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo aksioma).

Tada $\overline{AM} = \overline{OD}$.

Iš $\overline{AM} = \overline{OD}$ ir $\overline{BO} = \overline{OD}$ gauname, kad $\overline{AM} = \overline{BO}$. Iš čia – $\overline{AB} = \overline{MO}$.

Iš $\overline{DC} = \overline{MO}$ ir $\overline{AB} = \overline{MO}$ gauname, kad $\overline{DC} = \overline{AB}$. Vadinasi, keturkampis $DCBA$ (tas pats – $ABCD$) yra lygiagretainis.

49. Iš priešingųjų orientuotųjų atkarpų $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ pradžios taškų jų tiesėse atidėtos priešingosios orientuotosios atkarpos $\overline{AA_1}$ ir $\overline{CC_1}$. Įrodykite, kad $\overline{A_1B}$ ir $\overline{C_1D}$ yra priešingos orientuotosios atkarpos.

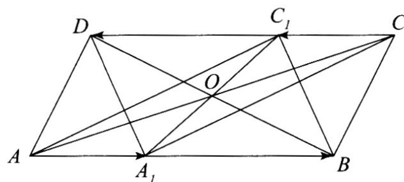
Sprendimas

Nagrinėkime du galimus atvejus:

a) atkarpos AB ir CD yra skirtingose tiesėse;

b) atkarpos AB ir CD yra vienoje tiesėje.

a) Iš sąlygos turime, kad $\overline{AB} = \overline{DC}$. Tai reiškia, kad keturkampis $ABCD$ (32 pav.) yra lygiagretainis. Jo įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Taškas O yra įstrižainių AC ir BD vidurio taškas (remiamės lygiagretainio įstrižainių savybe).



32 pav.

Iš sąlygos dar turime, kad $\overline{AA_1} = \overline{C_1C}$. Tai reiškia, kad keturkampis AA_1CC_1 yra lygiagretainis. Jo įstrižainės AC ir A_1C_1 irgi susikerta ir jų susikirtimo taškas abi įstrižaines dalija pusiau. Kadangi įstrižainės AC vidurio taškas yra taškas O, tai ir įstrižainės A_1C_1 vidurio taškas yra taškas O.

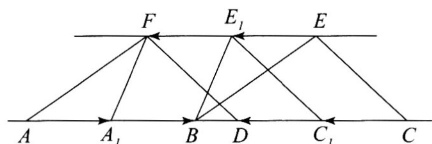
Iš to gauname, kad taškas O yra keturkampio A_1BC_1D įstrižainių BD ir A_1C_1 susikirtimo taškas ir jis kiekvieną įstrižainę dalija pusiau. Toks keturkampis yra lygiagretainis. Vadinasi, $\overline{A_1B} = \overline{DC_1}$, kitaip – $\overline{A_1B}$ ir $\overline{C_1D}$ yra priešingos orientuotosios atkarpos.

b) Sakykime, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AA_1} = \overline{C_1C}$, o taškai A, B, B_1 ir C, D, C_1 yra vienoje tiesėje.

Pasirinkime tašką, nesantį minėtoje tiesėje. Pažymėkime jį raide E ir atidėkime šitokias orientuotąsias atkarpas: $\overline{EF} = \overline{BA}$, $\overline{EE_1} = \overline{A_1A}$ (33 pav.).

Pritaikę a) atveju gautą rezultatą, gauname: $\overline{A_1B} = \overline{FE_1}$.

Tačiau tada $\overline{EF} = \overline{CD}$, $\overline{EE_1} = \overline{CC_1}$, todėl $\overline{FE_1} = \overline{DC_1}$ (pagal ne vienoje tiesėje esančių orientuotųjų atkarpų lygumo apibrėžimą).



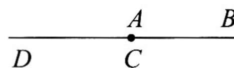
33 pav.

Iš $\overline{A_1B} = \overline{FE_1}$ ir $\overline{FE_1} = \overline{DC_1}$ gauname, kad $\overline{A_1B} = \overline{DC_1}$, t. y. ir šiuo atveju $\overline{A_1B}$ ir $\overline{C_1D}$ yra priešingos orientuotosios atkarpos.

50. Išnagrinėkite vienos tiesės dviejų priešpriešinių spindulių sankirtą.

Sprendimas

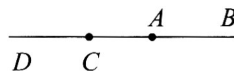
Nagrinėkime vienos tiesės priešpriešinius spindulius AB ir CD. Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai taškai A ir C sutampa (34 pav.).



34 pav.

Žinome, kad taškas A (C) tiesę padalija į du spindulius, kurie turi tik vieną bendrą tašką – spindulių pradžią (remiamės tiesės dalijimo teorema). Vadinasi, tie spinduliai yra priešpriešiniai, o jų sankirta – taškas.

Sakykime, A ir C – skirtingi taškai (35 pav.). Žinome (žr. 38 uždavinį), kad taškai A ir C tiesę dalija į tris dalis: du bendrų taškų neturinčius spindulius AB ir CD bei atkarpą AC.



35 pav.

Spinduliai AB ir CD nėra vienakrypčiai, nes, neturėdami bendrų taškų, negali būti vienas kitame, todėl jie yra priešpriešiniai (remiamės apibrėžimu). Jų sankirta yra tuščioji aibė.

Taškai A ir C nusako dar vieną spindulių porą: AD ir CB. Jie nėra vienakrypčiai, nes nė vienas jų negali būti kitame (spinduliai CD ir AB, kurie yra spindulių AD ir CB dalys, neturi

bendrų taškų). Vadinasi, spinduliai AD ir CB yra priešpriešiniai. Jų sankirta yra atkarpa AC.

Taigi dviejų priešpriešinių vienos tiesės spindulių sankirta gali būti taškas, tuščioji aibė, atkarpa.

51. Kiekvienas iš dviejų spindulių yra priešpriešinis trečiam spinduliui. Įrodykite, kad tie du spinduliai yra vienakrypčiai.

Sprendimas

A B
C D
F E G

36 *pav.*

Sakykime, $AB\uparrow\downarrow EF$, $CD\uparrow\downarrow EF$ (36 pav.). Įrodysime, kad $AB\uparrow\uparrow CD$.

Spindulio EF papildomą spindulį pažymėkime ženklu EG. Tada $AB\uparrow\uparrow EG$, $CD\uparrow\uparrow EG$ (remiamės vienakrypčių ir priešpriešinių spindulių apibrėžimais). Remdamiesi spindulių vienakryptiškumo simetriškumu (jis akivaizdus iš vienakrypčių spindulių apibrėžimo) ir tranzityvumu (galima įrodyti), gauname, kad $AB\uparrow\uparrow CD$.

52. Ar vektorių kolinearumas yra tranzityvus?

Sprendimas

Vektorių kolinearumas būtų tranzityvus, jei būtų teisingas šitoks teiginys: jei $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, tai $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Toks teiginys yra klaidingas. Kadangi nulinį vektorių laikome kolineariu su kiekvienu vektoriumi, tai, tarę, kad $\vec{b} = \vec{0}$, iš minėto teiginio gautume, kad $\vec{a} \parallel \vec{c}$ visais atvejais. Taip nėra. Taigi vektorių kolinearumas nėra tranzityvus.

7. Veiksmai su plokštumos vektoriais

Panaudojant praeitame skyriuje nustatytą abipusę atitiktį „lygiagretusis postūmis ↔ vektorius" ir lygiagrečiųjų postūmių kompoziciją, neformaliai apibrėžta vektorių sudėtis. Išnagrinėtos vektorių sudėties savybės. Čia praverčia lygiagrečiojo postūmio aksioma: įrodant vektorių sudėties perstatomumo dėsnį, nereikia skirti atvejų, kai vektoriai yra nekolinearūs ir kai jie yra kolinearūs. (Dažnai atvejis, kai vektoriai yra kolinearūs, paliekamas nagrinėti savarankiškai. Tačiau šiuo atveju įrodymas bent jau ne lengvesnis negu tada, kai vektoriai yra nekolinearūs.)

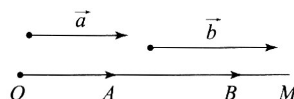
Smulkiai išnagrinėtos vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybės. Antrąjį skirstomumo dėsnį, kai vektoriai yra nekolinearūs, patogiau įrodyti remiantis ne trikampio taisykle, o lygiagretainio taisykle (žr. 148 uždavinį).

Vektorius reikšti dviem nekolineariais vektoriais yra svarbu sprendžiant uždavinius, grindžiant koordinačių metodą. Pateikti trys uždavinių sprendimo pavyzdžiai. Sprendžiant uždavinius patogu taikyti atkarpos dalijimo nurodytu santykiu formules (vektorine forma).

Apibrėžus dviejų vektorių sumą, verta atskirai aptarti kolinearių vektorių sumą. Nors aptariamoje knygelėje [2] tai pateikta kaip užduotys (p. 49), atsižvelgdami į kolinearių vektorių sudėties specifiškumą, jas atliksime čia.

1) Įrodykite, kad dviejų vienakrypčių vektorių suma yra su jais vienakryptis vektorius, kurio ilgis lygus tų vektorių ilgių sumai.

Sprendimas



37 pav.

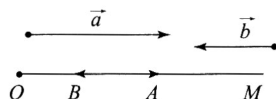
Nagrinėkime vienakrypčius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ (37 pav.). Pasirinkime su jais vienakryptį spindulį OM.

Iš taško O atidėkime vektorių $\vec{a}: \overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Taškas A yra spindulyje OM (priešingu atveju spindulys OM ir vektorius $\vec{a}$ nebūtų venakrypčiai).

Iš taško A atidėkime vektorių $\vec{b}: \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Taškas B yra spindulyje AM, todėl yra ir spindulyje OM. Vadinasi, vektorius $\vec{a}+\vec{b}$ yra vienakryptis ir su vektoriumi $\vec{a}$, ir su vektoriumi $\vec{b}$. Kadangi taškas A yra tarp taškų O ir B, tai $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

2) Įrodykite, kad dviejų priešpriešinių (ne priešingųjų) vektorių suma yra su ilgesniuoju vektoriumi venakryptis vektorius, kurio ilgis lygus ilgesniojo ir trumpesniojo vektorių ilgių skirtumui.
Kokia yra priešingųjų vektorių suma?

Sprendimas



38 pav.

Nagrinėkime priešpriešinius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Tarkime, kad vektorius $\vec{a}$ ilgesnis už vektorių $\vec{b}$: $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ (38 pav.).

Pasirinkime spindulį OM, vienakryptį su ilgesniuoju vektoriumi $\vec{a}$. Sakykime, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Pagal vektorių sudėties taisyklę vektorių $\vec{b}$ atidėkime iš taško A: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Kadangi vektorius $\vec{b}$ yra priešpriešinis vektoriui $\vec{a}$, tai taškas B bus spindulio BM papildomame spindulyje. Tačiau kadangi vektorius $\vec{b}$ trumpesnis už vektorių $\vec{a}$, tai taškas B bus atkarpoje OM, todėl $|\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OA}|$ (remiamės trečiąja atstumo aksioma). Taigi vektorius $\overrightarrow{OB}$ yra vienakryptis su spinduliu OM, taigi ir su vektoriumi $\vec{a}$ (ilgesniuoju), o jo ilgis lygus $|\vec{a}| - |\vec{b}|$.

Aišku, kad priešingųjų vektorių suma yra nulinis vektorius.

Uždaviniai

53. Žr. p. 25.
54. Žr. p. 26.

55. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, yra lygiagreti su trapecijos pagrindais, o jos ilgis lygus pusei pagrindų ilgių skirtumo.

Sprendimas

Nagrinėkime trapeciją $ABCD$, kurios $AB \parallel CD$ (39 pav.). Sakykime, taškai M ir N yra trapecijos įstrižainių vidurio taškai. Tada $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ND}$.

39 pav.

Taikydami kelių vektorių sudėties taisyklę, dviem būdais rasime vektorių $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}.$$

Šias lygybes sudėję ir pritaikę vektorių sudėties dėsnius, gauname:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN}) = \vec{0} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Iš čia randame:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right).$$

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra priešpriešiniai, tai jų suma yra vienakryptė su ilgesniuoju vektoriumi (šiuo atveju $\overrightarrow{AB}$), o ilgis lygus ilgesniojo ir trumpesniojo vektorių ilgių skirtumui (remiamės dviejų priešpriešinių vektorių sumos savybe). Taigi $MN \parallel AB$, MN || CD, $MN = \frac{1}{2}(AB - CD)$.

56. Žinoma, kad $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$, čia O – bet kuris taškas. Įrodykite, kad taškai A, B, C yra vienoje tiesėje.

Sprendimas

Pertvarkome turimą lygybę:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right),\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}.$$

Iš čia gauname, kad vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs. Kadangi jie atidėti nuo vieno taško, tai taškai A, B, C yra vienoje tiesėje.

57. Įrodykite: jei trys taškai A, B, C priklauso vienai tiesei, tai $k\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, skaičiai k, m, n – ne visi lygūs nuliui, $k + m + n = 0$, O – bet kuris taškas. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.

Sprendimas

Kai taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BC}$ yra kolinearūs, taigi $\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{BC}$ (remiamės dviejų vektorių kolinearumo būtinąja sąlyga).

Kad ir kuris būtų taškas O,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB},$$

taigi

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = p\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right), \text{ arba } -\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + (1-p)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Iš gautos lygybės kairės pusės reiškinio koeficientų -1, p, $1 - p$ vienas tikrai nelygus nuliui, o jų suma $(-1) + p + (1-p)$ lygi nuliui.

Įrodysime atvirkštinį teiginį: jei $k\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, O – bet kuris taškas, bent vienas iš skaičių k, m, n nelygus nuliui, bet $k + m + n = 0$, tai taškai A, B, C yra vienoje tiesėje.

Kadangi

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC},$$

tai duota lygybė virsta lygybe

$$k\overrightarrow{OA} + m\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + n\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}, \text{ arba}$$

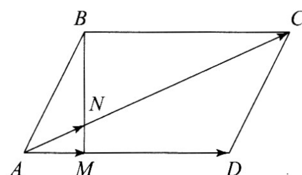
$$(k+m+n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Bent vienas iš skaičių m ir n nelygus nuliui (jei būtų $m = 0$, $n = 0$, tai iš lygybės $k + m + n = 0$ gautume, kad ir $k = 0$, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai). Tarkime, kad $n \neq 0$. Tada

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{AB},$$

taigi vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs (remiamės dviejų vektorių kolinearumo pakankamąja sąlyga). Kadangi abu vektoriai atidėti iš vieno taško, tai taškai A, B, C yra vienoje tiesėje.

58. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AD ir įstrižainėje AC pažymėti taškai M ir N; $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Įrodykite, kad taškai M, N, B yra vienoje tiesėje. Raskite santykį, kuriuo taškas N dalija atkarpą MB.



40 pav.

Sprendimas

Kad taškai M, N, B (40 pav.) būtų vienoje tiesėje, būtina ir pakanka, kad vektoriai $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NB}$ būtų kolinearūs. Vektorius $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NB}$ išreikškime nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AN}$. Gauname: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}=5\overrightarrow{AN}-5\overrightarrow{AM}=5\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)=5\overrightarrow{MN}$.

Iš lygybės $\overrightarrow{NB}=5\overrightarrow{MN}$ gauname, kad vektoriai $\overrightarrow{NB}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra kolinearūs (remiamės vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimu). Taigi taškai M, N, B yra vienoje tiesėje.

Remdamiesi minėtu apibrėžimu, rasime ir ieškomą santykį:

$MN:NB=|\overrightarrow{MN}|:|\overrightarrow{NB}|=|\overrightarrow{MN}|:5|\overrightarrow{MN}|=1:5.$

59. Įrodykite, kad tiesių, kuriose yra trapecijos šoninės kraštinės, susikirtimo taškas, trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas ir trapecijos pagrindų vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

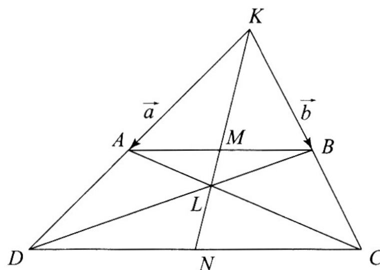
Sprendimas

Nagrinėkime trapeciją $ABCD$, kurios pagrindai yra atkarpos AB ir CD ($AB \parallel CD$; 41 pav.). Tiesių, kuriose yra trapecijos šoninės kraštinės, susikirtimo tašką pažymėkime raide K, trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką – raide L, trapecijos pagrindų AB ir CD vidurio taškus – raidėmis M ir N. Pasirinkime du nekolinearius vektorius, pavyzdžiui, $\overrightarrow{KA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KB}=\vec{b}$. Tada $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ (čia verta prisiminti vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę).

Pritaikę apibendrintąją Talio teoremą, gauname:

$\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{pa}$, $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{pb}$, p – tam tikras skaičius;

$$\overrightarrow{KN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}\right)=\frac{1}{2}p(\vec{a}+\vec{b}).$$



41 pav.

Kadangi $\overrightarrow{KN}=p\overrightarrow{KM}$, tai vektoriai $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{KM}$ yra kolinearūs, o taškai K, M, N yra vienoje tiesėje.

Liko įrodyti, kad ir taškas L yra toje tiesėje.

Rasime tiesių KN ir AC susikirtimo tašką.

Sakykime, R yra tiesės KN taškas. Tada $\overrightarrow{KR} \parallel \overrightarrow{KN}$, todėl

$$\overrightarrow{KR} = r\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Kadangi

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} = -\vec{a} + \overrightarrow{pb},$$

tai taškas R priklausys tiesei AC, kai $\overrightarrow{AR} \parallel \overrightarrow{AC}$. Tačiau

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{KR} - \overrightarrow{KA} = r(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = (r-1)\vec{a} + r\vec{b}.$$

Vektoriai $\overrightarrow{AR}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearūs, kai vieną iš jų galima gauti kitą padauginus iš kurio nors skaičiaus, t. y. kai jų išraiškų nekolineariais vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atitinkami koeficientai yra proporcingi:

$$\frac{r-1}{-1} = \frac{r}{p}.$$

Iš čia randame, kad $r = \dfrac{p}{p+1}$. Taigi $\overrightarrow{KR} = \dfrac{p}{p+1}(\vec{a} + \vec{b})$.

Tada $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KR} = -\vec{b} + \dfrac{p}{p+1}(\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{1}{p+1}(p\vec{a} - \vec{b}) = -\dfrac{1}{p+1}\overrightarrow{BD}$. Vadinasi, taškas R priklauso ir tiesei BD.

Taigi taškas R yra trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas (anksčiau jis buvo pažymėtas raide L).

60. Taškai A_1, B_1, C_1 trikampio ABC kraštines BC, CA, AB dalija santykiais $k = -\dfrac{3}{2}$, $m = -\dfrac{1}{3}$, $n = 2$. Įrodykite, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 yra lygiagrečios.

Sprendimas

Prisiminkime truputį teorijos.

Kai $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, sakoma, kad taškas C atkarpą AB dalija santykiu k. Tada

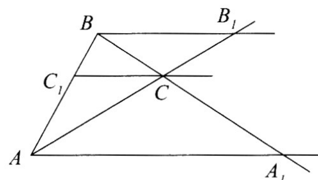
$$\overrightarrow{AC} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}.$$

Pritaikę šias formules, randame:

$$\overrightarrow{BA_1} = 3\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CB_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AC_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Kad būtų vaizdžiau, tai nubraižyta 42 paveiksle.

Pasirinkę tašką O, randame:



42 pav.

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + 3\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

Iš čia randame:

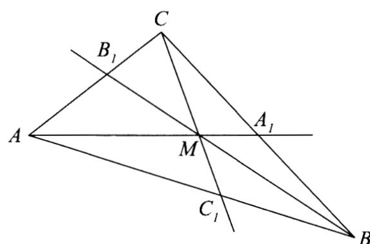
$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{CC_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}.$$

Taigi vektoriai $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ yra kolinearūs. Vadinasi, tiesės AA_1, BB_1, CC_1 yra lygiagrečios.

61. Taškai A_1, B_1, C_1, iš kurių nė vienas nesutampa su trikampio ABC viršūne, trikampio ABC kraštines BC, CA, AB dalija santykiais k, m, n. Kaip susiję skaičiai k, m, n, kai tiesės AA_1, BB_1, CC_1:
a) susikerta viename taške;
b) yra lygiagrečios?
Kokie turi būti skaičiai k, m, n, kad tiesių AA_1, BB_1, CC_1 susikirtimo taškas kiekvieną iš atkarpų AA_1, BB_1, CC_1 dalytų tuo pačiu santykiu?

Sprendimas

a) Sakykime, tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške. Tą tašką pažymėkime raide M (43 pav.).



43 pav.

Pritaikę atkarpos dalijimo nurodytu santykiu formulę (žr. 60 uždavinį), randame:

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CB_1} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AC_1} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB}.$$

Pasirinkime tašką. Pažymėkime jį raide O. Tada

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right);$$

$$\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OC}.$$

Panašiai gautume:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{m+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{n+1}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

(Vektorių $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ išraiškas galima gauti iš vektoriaus $\overrightarrow{AA_1}$ išraiškos atitinkamai pakeitus raides.)

Trim būdais randame vektorių $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+p\overrightarrow{AA_1}=(1-p)\overrightarrow{OA}+\frac{p}{k+1}\overrightarrow{OB}+\frac{kp}{k+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{BB_1}=\frac{mr}{m+1}\overrightarrow{OA}+(1-r)\overrightarrow{OB}+\frac{r}{m+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{CC_1}=\frac{s}{n+1}\overrightarrow{OA}+\frac{ns}{n+1}\overrightarrow{OB}+(1-s)\overrightarrow{OC}.$$

Dabar tarkime, kad taškas O sutampa su vienu iš taškų A, B, C, pavyzdžiui, su tašku A. Tada

$$\overrightarrow{AM}=\frac{p}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{kp}{k+1}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}=(1-r)\overrightarrow{AB}+\frac{r}{m+1}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}=\frac{ns}{n+1}\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}.$$

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ nekolinearūs, plokštumos vektorius dviem nekolineariais vektoriais reiškiamas vienareikšmiškai, todėl

$$\frac{p}{k+1}=1-r,\ \frac{kp}{k+1}=\frac{r}{m+1};\ \frac{p}{k+1}=\frac{ns}{n+1},\ \frac{kp}{k+1}=1-s.$$

Iš pirmų trijų lygčių randame:

$$p=\frac{k+1}{km+k+1},\ r=\frac{k(m+1)}{km+k+1},\ s=\frac{n+1}{n(km+k+1)}.$$

Įrašę šias p, r, s reikšmes į ketvirtą lygtį ir pertvarkę, gauname ieškomą sąlygą: $kmn = 1$.

b) Sakykime, vietoj taško O pasirinkome tašką A. Tada iš a) atvejo rezultatų gauname:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\right),\ \overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{m+1}\left(-(m+1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right),\ \overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{n+1}\left(n\overrightarrow{AB}-(n+1)\overrightarrow{AC}\right).$$

Kadangi tiesės AA_1, BB_1, CC_1 yra lygiagrečios, tai vektoriai $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ yra kolinearūs. Tada jų išraiškų dviem nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ atitinkami koeficientai yra proporcingi. Vadinasi,

$$\frac{1}{-(m+1)}=\frac{k}{1},\ \frac{-(m+1)}{n}=\frac{1}{-(n+1)}.$$

Iš čia randame:

$$k=-\frac{1}{m+1},\ n=-\frac{m+1}{m}.$$

Lengva patikrinti, kad ir šiuo atveju $kmn = 1$.

Liko atsakyti į paskutinį klausimą.

Skaičiai p, r, s yra santykiai, kuriais tiesių AA_1, BB_1, CC_1 susikirtimo taškas M (žr. atvejį a) dalija atkarpas AA_1, BB_1, CC_1. Tie santykiai lygūs, kai $p = r = s$, t. y. kai

$$\frac{k+1}{km+k+1}=\frac{k(m+1)}{km+k+1}=\frac{n+1}{n(km+k+1)}.$$

arba

$n(k + 1) = kn(m + 1) = n + 1.$

Prisiminę, kad dar turi būti

$kmn = 1$

(tik tada tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške), randame, kad $k = 1$, $m = 1$, $n = 1$.

Vadinasi, tik trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas kiekvieną pusiaukraštinę dalija tuo pačiu santykiu.

62. Remdamiesi 61 uždavinio a) ir b) rezultatais, suformuluokite bendrą teiginį – Čevos teoremą.

Sprendimas

Išnagrinėję atvejį, kai per trikampio viršūnes einančios tiesės, iš kurių nė viena nėra trikampio kraštinė, susikerta viename taške, ir atvejį, kai tos tiesės yra lygiagrečios (susikerta be galo nutolusiame taške), gavome vieną bendrą išvadą: $kmn = 1$ (čia k, m, n – santykiai, kuriais tos tiesės dalija trikampio kraštines).

Trumpai tai išreikšime šitaip:

jei taškai A_1, B_1, C_1, iš kurių nė vienas nėra trikampio viršūnė, trikampio kraštines BC, CA, AB dalija santykiais k, m, n ir tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške arba yra lygiagrečios, tai $kmn = 1$.

63. Įrodykite Čevos teoremai atvirkštinę teoremą: jei taškai A_1, B_1, C_1, iš kurių nė vienas nesutampa su trikampio ABC viršūne, trikampio ABC kraštines BC, CA, AB dalija santykiais k, m, n ir $kmn = 1$, tai tiesės AA_1, BB_1, CC_1 arba susikerta viename taške, arba yra lygiagrečios.

Sprendimas

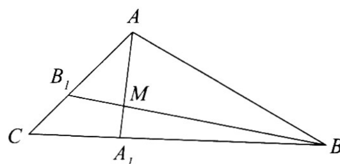
Pasirinkime tašką. Pažymėkime jį raide O.

Pirmiausia, panaudoję sąlygą $kmn = 1$, pašalinsime n. Tada gausime (žr. 61 uždavinį):

$$\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{m+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{km}{km+1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{km+1}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$



44 pav.

Išnagrinėsime du galimus atvejus:

a) tiesės AA_1 ir BB_1 susikerta;

b) tiesės AA_1 ir BB_1 yra lygiagrečios.

a) Tiesių AA_1 ir BB_1 susikirtimo tašką pažymėkime raide M (44 pav.). Tada

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AA_1} = (1-p)\overrightarrow{OA} + \frac{p}{k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{kp}{k+1}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{BB_1}=\frac{mr}{m+1}\overrightarrow{OA}+(1-r)\overrightarrow{OB}+\frac{r}{m+1}\overrightarrow{OC}.$$

Dabar tarkime, kad taškas O sutampa su tašku A. Gausime:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{p}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{kp}{k+1}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}=(1-r)\overrightarrow{AB}+\frac{r}{m+1}\overrightarrow{AC}.$$

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ nekolinearūs. Plokštumos vektorius dviem nekolineariais vektoriais išreiškiamas vienareikšmiškai, todėl

$$\frac{p}{k+1}=1-r,\ \frac{kp}{k+1}=\frac{r}{m+1}.$$

Iš čia randame:

$$p=\frac{k+1}{km+k+1},\ r=\frac{k(m+1)}{km+k+1}.$$

Kai taškas O sutampa su tašku A,

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{km+1}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{km+k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{km+k+1}\overrightarrow{AC}=\frac{km+1}{km+k+1}\left(\frac{1}{km+1}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right),$$

arba

$$\overrightarrow{CM}=\frac{km+1}{km+k+1}\overrightarrow{CC_1}.$$

Iš čia gauname, kad ir tiesė CC_1 eina per tašką M.
Vadinasi, visos trys tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške (taške M).

b) Šiuo atveju vektorių $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ išraiškos nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ (jos gaunamos iš šio uždavinio sprendimo pradžioje gautų išraiškų, tašką O pakeitus tašku A) yra:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{km+1}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

Sakykime, tiesės AA_1 ir BB_1 yra lygiagrečios. Tada vektoriai $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$ yra kolinearūs, todėl jų išraiškų nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ atitinkami koeficientai yra proporcingi.

Vadinasi,

$$\frac{1}{k+1}:(-1)=\frac{k}{k+1}:\frac{1}{m+1}.$$

Iš čia randame, kad

$$k=-\frac{1}{m+1}.$$

Tokiu atveju

$$\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{CC_1}=(m+1)\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-(m+1)(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC}),$$

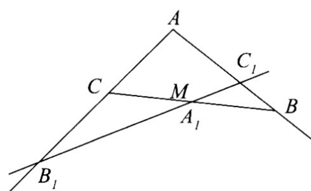
$$\overrightarrow{CC_1}=-(m+1)\overrightarrow{BB_1}.$$

Iš šios lygybės gauname, kad $\overrightarrow{CC_1} \parallel \overrightarrow{BB_1}$. Vadinasi, visos trys tiesės AA_1, BB_1, CC_1 yra lygiagrečios.

64. Įrodykite Menelajo teoremą: jei taškai A_1, B_1, C_1, iš kurių nė vienas nesutampa su trikampio ABC viršūne, trikampio ABC kraštines BC, CA, AB dalija santykiais k, m, n ir taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje, tai $kmn=-1$.

Sprendimas

Uždavinio sąlygą paaiškina 45 paveikslas. Pritaikę atkarpos dalijimo nurodytu santykiu formules (jos primenamos sprendžiant 60 uždavinį), gauname:



45 pav.

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{A_1C}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{CB_1}=\frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{B_1A}=\frac{1}{m+1}\overrightarrow{CA};$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{C_1B}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}.$$

Jei taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$ yra kolinearūs.

Randame vektorius $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$:

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CB_1}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BC}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{k+1}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{m}{m+1}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{(k+1)(m+1)}(-(m+1)\overrightarrow{AB}-(km-1)\overrightarrow{AC});$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC_1} = -\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB} = -\frac{k}{k+1}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)(n+1)}((kn-1)\overrightarrow{AB} - k(n+1)\overrightarrow{AC}).$$

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$ yra kolinearūs, tai jų išraiškų nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ atitinkami koeficientai yra proporcingi, t. y.

$$\frac{-(m+1)}{kn-1} = \frac{km-1}{k(n+1)}.$$

Iš čia gauname:
$(k + 1)(kmn + 1) = 0$.
Kadangi $k + 1 \neq 0$, tai $kmn + 1 = 0$, $kmn = -1$.

65. Suformuluokite Menelajo teoremai (žr. 64 uždavinį) atvirkštinę teoremą ir įrodykite ją.

Sprendimas

Reikia įrodyti teoremą: jei taškai A_1, B_1, C_1, iš kurių nė vienas nesutampa su trikampio ABC viršūne, to trikampio kraštines BC, CA, AB dalija santykiais k, m, n ir $kmn = -1$, tai taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje.

Kad taškai A_1, B_1, C_1 būtų vienoje tiesėje, būtina ir pakanka, kad vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$ būtų kolinearūs. Rasime vektorius $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$. Taikysime 64 uždavinio sprendimo pradžioje primintas atkarpos dalijimo nurodytu santykiu formules. Vietoje n įrašysime $-\frac{1}{km}$.

Gausime:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{(k+1)(m+1)}(-(m+1)\overrightarrow{AB} - (km-1)\overrightarrow{AC}),$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC_1} = \frac{k}{(k+1)(km-1)}(-(m+1)\overrightarrow{AB} - (km-1)\overrightarrow{AC}).$$

Gavome, kad vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$ yra kolinearūs su nenuliniu vektoriumi, todėl ir vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ bei $\overrightarrow{A_1C_1}$ yra kolinearūs. Kadangi jie atidėti iš to paties taško, tai taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje.

8. Plokštumos vektorių ir taškų koordinatės

Skyrelyje „Tiesės koordinačių sistema“, galima sakyti, kitais žodžiais, negu pagrindinės mokyklos kurse, aptariama skaičių tiesė.

Plokštumos koordinačių sistema skiriasi nuo iš anksčiau žinomos koordinačių sistemos, kuri dažnai vadinama stačiakampe dekartine plokštumos koordinačių sistema.

Vienas skirtumas, galima sakyti, yra neesminis, nes jau žemesnėse klasėse pabrėžiama, kad vienetai skirtingose ašyse gali būti skirtingi, nes tose ašyse gali būti vaizduojami skirtingi dalykai.

Aptariamoje knygelėje [2] atsisakoma koordinačių ašių statmenumo. Tiksliau, jokio statmenumo dar nėra. Tokia koordinačių sistema nenoriai priimama gal dėl to, kad lyginant su įprastąja atrodo „kreiva“.

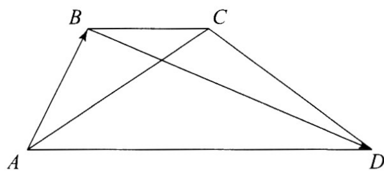
Nauja reikėtų laikyti ir tai, kad pirmiau apibrėžiamos vektorių, paskui taškų koordinatės. Prie to reiktų priprasti, nes taip priartėjama prie tolesnėms studijoms reikalingų dalykų.

Skyrelyje „Veiksmai su koordinatėmis nusakytais vektoriais“ gautas rezultatas – kokie veiksmai (sudėtis ir daugyba iš skaičiaus) atliekami su vektoriais, tokie veiksmai atliekami ir su atitinkamomis jų koordinatėmis – yra vienas svarbiausių geometrijoje taikant algebrą.

Uždaviniai

66. Žinomas trapecijos $ABCD$ pagrindų santykis: $BC : AD = k$. Baziniais laikydami vektorius $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$, raskite vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ koordinates.

Sprendimas



46 *pav.*

Kai baziniai vektoriai yra $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ ir $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis laikomi skaičiai x, y. Kai nurodomos tik vektoriaus koordinatės, jos rašomos tokia pat tvarka, kokia ir baziniai vektoriai: $\vec{a}\,(x;\, y)$. Todėl pirmiausia visus šešis vektorius išreikšime baziniais vektoriais $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$. Geriau orientuotis padės 46 paveikslas.

Nuosekliai randame:

$$\overrightarrow{AB} = 0 \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -k \cdot \overrightarrow{AD} + (-1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (1-k)\overrightarrow{AD} + (-1)\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{DA} = (-1) \cdot \overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = 1 \cdot \overrightarrow{AD} + (-1)\overrightarrow{AB}.$$

Vadinasi, ieškomos koordinatės yra:

$\overrightarrow{AB}\,(0;\, 1)$, $\overrightarrow{BC}\,(k;\, 0)$, $\overrightarrow{AC}\,(k;\, 1)$, $\overrightarrow{CD}\,(1-k;\, -1)$, $\overrightarrow{DA}\,(-1;\, 0)$, $\overrightarrow{BD}\,(1;\, -1)$.

67. Vektorių $\vec{c}\,(9;\,4)$ išreikškite vektoriais $\vec{a}\,(2;\,-3)$ ir $\vec{b}\,(1;\,2)$.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Kokie veiksmai (sudėtis ir daugyba iš skaičiaus) atliekami su vektoriais, tokie veiksmai atliekami ir su atitinkamomis jų koordinatėmis, todėl $(m\vec{a}+n\vec{b})(2m+n;\ -3m+2n)$.

Lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios (galima sakyti, ir „vektoriaus koordinatės nusakomos vienareikšmiškai"), todėl

$$\begin{cases}2m+n=9,\\ -3m+2n=4.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame: $m = 2$, $n = 5$. Vadinasi, $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$.

68. Kiekvieną iš vektorių $\vec{a}\,(3;\,-2)$, $\vec{b}\,(-2;\,1)$, $\vec{c}\,(7;\,-4)$ išreikškite kitais dviem vektoriais.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$. Tada skaičiams m ir n rasti turime šitokią lygčių sistemą (paaiškinimą žr. 67 uždavinyje):

$$\begin{cases}-2m+7n=3,\\ m-4n=-2.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname: $m = 2$, $n = 1$. Vadinasi,

$\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}.$

Kitas išraiškas randame paprasčiau. Iš gautos išraiškos randame:

$$\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c},\quad \vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}.$$

69. Lygiagretųjį postūmį nusako vektorius $\vec{a}\,(k;\,m)$. Sudarykite lygiagrečiojo postūmio lygtis, t. y. taško $M(x;y)$ vaizdo $M'(x';y')$ koordinates išreikškite taško M koordinatėmis.

Sprendimas

Remdamiesi tuo, kad lygiagrečiojo postūmio atveju $\overrightarrow{MM'}=\vec{a}$, o $\overrightarrow{MM'}(x'-x;\ y'-y)$, gauname: $(x'-x;\ y'-y)=(k;\ m)$.

Lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios, todėl

$$\begin{cases}x'-x=k,\\ y'-y=m.\end{cases}$$

Iš čia ir gauname lygiagrečiojo postūmio lygtis:

$x'=x+k,$

$y'=y+m.$

9. Erdvės vektoriai

Plokštumos vektorius pradėjome nagrinėti nuo lygiagrečiojo postūmio – kampainio slinkimo palei liniuotės kraštą. Tačiau kampainis plokščiąja figūra buvo laikomas tol, kol domėjomės ta jo dalimi, kuri priglunda prie nagrinėjamos plokštumos. Apskritai kampainis yra erdvinė figūra (turi tam tikrą storį).

Grįždami prie kampainio postūmio, įsivaizduotume, kad ir visi kampainio, kaip erdvinės figūros, taškai juda vienodai – pasirinkta kryptimi per tam tikrą atstumą. Kadangi dvi lygiagrečios atkarpos yra vienoje plokštumoje, tai planimetrijoje pateiktas lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimas tinka ir stereometrijai.

Tačiau yra ir tam tikrų skirtumų.

Pirma. Nesiremiant vienoje plokštumoje esančių lygių orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumu, galima įrodyti vienoje plokštumoje nesančių orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumą.

Antra. Remiantis ne vienoje plokštumoje esančių orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumu, galima įrodyti vienoje plokštumoje esančių orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumą.

Vadinasi, ir erdvės vektorius bei veiksmus su jais galima apibrėžti taip pat kaip plokštumoje. O jų savybių net nereikia atskirai įrodinėti. Mat, išskyrus sudėties jungiamumo dėsnį, visais atvejais vektorius atitinkamai atidėję gauname plokštumos vektorius. O sudėties jungiamumo dėsnio įrodymas nesiejamas su geometrinėmis konstrukcijomis.

Įrodysime orientuotųjų atkarpų lygumo tranzityvumo teoremą.

Teorema

Jei AA', BB', CC' – lygiagrečios tiesės ir $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, tai $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$.

Įrodymas

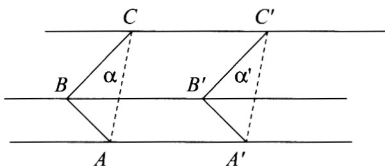
Išnagrinėsime du galimus atvejus:

a) tiesės AA', BB', CC' nėra vienoje plokštumoje;

b) tiesės AA', BB', CC' yra vienoje plokštumoje.

Remdamiesi ne vienoje tiesėje esančių lygių orientuotųjų atkarpų apibrėžimu, gauname, kad reikia įrodyti šitokį teiginį: jei $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, tai $AC \parallel A'C'$.

a) Šiuo atveju ir taškai A, B, C, ir taškai A', B', C' nėra vienoje tiesėje, todėl jie nusako dvi plokštumas. Pažymėkime jas α ir α' (47 pav.).

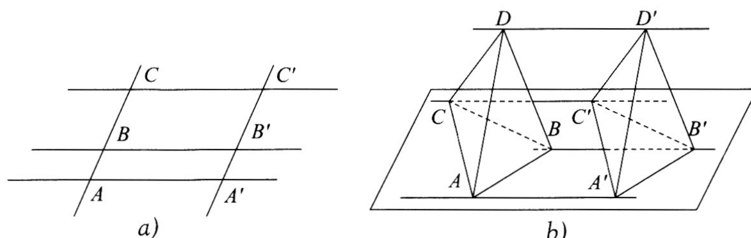


47 pav.

Plokštumos α dvi susikertančios tiesės (AB ir BC) yra lygiagrečios su plokštumos α' dviem tiesėmis ($A'B'$ ir $B'C'$), todėl tos plokštumos yra lygiagrečios (remiamės dviejų plokštumų lygiagretumo požymiu), t. y. $\alpha \parallel \alpha'$.

Lygiagrečias plokštumas α ir α' kerta plokštuma, einanti per tieses AA' ir CC', todėl susikirtimo tiesės yra lygiagrečios, t. y. $AC \parallel A'C'$.

b) Kai taškai A, B, C yra vienoje tiesėje (48 pav., *a*), teiginio teisingumas akivaizdus.



48 *pav.*

Sakykime, taškai A, B, C nėra vienoje tiesėje. Pasirinkime tašką, nesantį tiesių AA', BB', CC' plokštumoje. Pažymėkime jį raide D. Per tašką D nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese AA'. Per tašką A' nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese AD. Nubrėžtųjų tiesių susikirtimo tašką pažymėkime D'. Pritaikę a) dalyje įrodytą teiginį, gauname:

iš $AB \parallel A'B'$ ir $AD \parallel A'D'$ – $BD \parallel B'D'$;
iš $BD \parallel B'D'$ ir $BC \parallel B'C'$ – $CD \parallel C'D'$;
iš $CD \parallel C'D'$ ir $AD \parallel A'D'$ – $AC \parallel A'C'$.

Uždaviniai

70. Kiek vektorių nusako gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos?
Išvardykite priešingųjų vektorių poras.

Sprendimas

Kad būtų lengviau, pavaizduokime tą gretasienį (49 pav.).

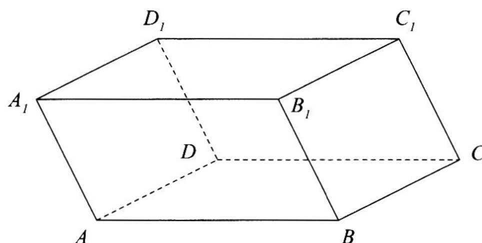
Vektorių nusako orientuotoji atkarpa ir bet kuri jai lygi orientuotoji atkarpa. Todėl dažnai vektoriumi laikoma ir orientuotoji atkarpa.

Lygios orientuotosios atkarpos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ nusako tą patį vektorių. Kad būtų trumpiau, sakysime, kad tas vektorius yra $\overrightarrow{AB}$. Lygios orientuotosios atkarpos $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$ irgi nusako tą patį vektorių – vektorių $\overrightarrow{BA}$.

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ yra priešingieji vektoriai.

Tą patį galima pasakyti apie kitas iš viršūnės A išeinančias orientuotąsias atkarpas.

Vadinasi, gretasienio briaunos nusako tris priešingųjų vektorių poras: $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{A_1A}$. Gavome, kad gretasienio briaunos nusako šešis vektorius.



49 *pav.*

71. Turime gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{C_1B}$.

Sprendimas

Vektorius sudėsime taikydami trikampio taisyklę – iš vieno vektoriaus pabaigos atidėdami kitą vektorių.

a) $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1},\ \overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

Teiginį įrodėme, nes gavome lygius vektorius: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

b) $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{D_1A},\ \overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{BA}$.

Lygybė teisinga, nes gavome tą patį vektorių.

72. Turime gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$; b) $\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C_1C}$.

Sprendimas

Pritaikę vektorių sudėties daugiakampio taisyklę, iš karto gauname:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$;

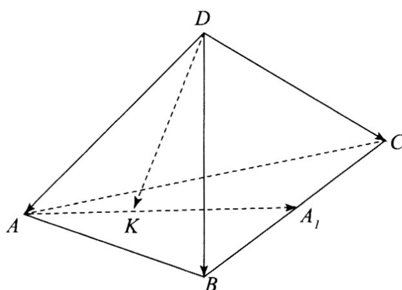
b) $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1},\ \overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{D_1B}$.

73. Turime trikampę piramidę $ABCD$. Raskite vektorių $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})$.

Sprendimas

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

74. Trikampės piramidės $ABCD$ sienos ABC pusiaukraštinę AA_1 taškas K dalija santykiu $AK : KA_1 = 3 : 7$. Vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.



50 pav.

Sprendimas

Piramidė ir atitinkamos atkarpos pavaizduotos 50 paveiksle.

Pritaikę atkarpos dalijimo nurodytu santykiu formules (žr. 60 uždavinį), gauname:

$\overrightarrow{AK}=0{,}3\overrightarrow{AA_1}$.

Remdamiesi veiksmų su vektoriais apibrėžimais ir savybėmis, randame:

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{AK}=0{,}3\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{BA_1}=0{,}5\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}.$$

Į $\overrightarrow{DK}$ išraišką įrašę atitinkamų vektorių išraiškas ir atlikę veiksmus, gauname, kad

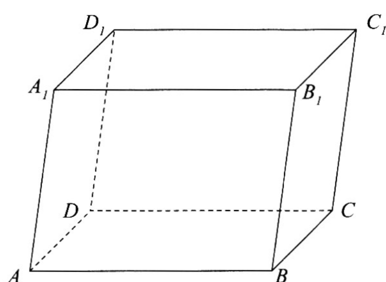
$$\overrightarrow{DK}=0{,}7\overrightarrow{DA}+0{,}15\overrightarrow{DB}+0{,}15\overrightarrow{DC}.$$

75. Turime gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite vektorius:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$; b) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; c) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}$;

d) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}$; e) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$.

Palyginę atvejų a) ir b) rezultatus, suformuluokite trijų nekomplanarių vektorių sudėties gretasienio taisyklę (prisiminkite dviejų nekolinearių vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę). Gretasienio taisyklę pritaikykite atveju c).



51 *pav.*

Sprendimas

Sprendimas bus paprastesnis, jei tą gretasienį pavaizduosime (51 pav.).

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

b) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{DB_1}$.

Abiem atvejais sumą radome pritaikę vektorių sudėties daugiakampio taisyklę.

Antra vertus, abiem atvejais reikėjo sudėti tris iš gretasienio viršūnės atidėtus nekomplanarius vektorius, kuriuos nusako iš tos viršūnės išeinančios gretasienio briaunos. Gavome, kad tų vektorių sumą nusako iš minėtos viršūnės išeinanti gretasienio įstrižainė. Trumpai vektorių sudėties gretasienio taisyklę galima formuluoti šitaip: iš vieno taško atidėti trys nekomplanarūs vektoriai ir jų suma yra trys gretasienio briaunos ir įstrižainė.

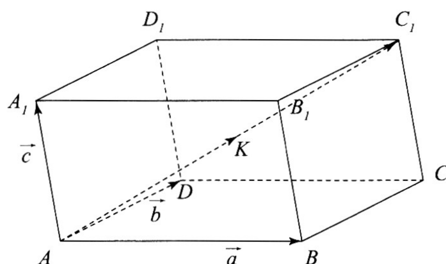
c) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{B_1A_1}-\overrightarrow{B_1C_1}-\overrightarrow{B_1B}=-(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B})=-\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{DB_1}$.

d) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A_1C}$.

e) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

76. Sakykime, K, L, M, N yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainių AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.

Palyginę gautas išraiškas, suformuluokite gretasienio įstrižainių savybę.



52 *pav.*

Sprendimas

Pavaizduokime gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$, jo įstrižainę AC_1 ir jos vidurio tašką K (52 pav.). Kitų įstrižainių vidurio taškus pažymėkime raidėmis L, M, N.

Ieškomiems vektoriams rasti taikysime gretasienio taisyklę. Gausime:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1})=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

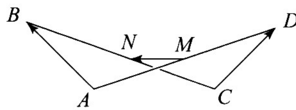
$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1})=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

Palyginę gautas išraiškas, gauname:

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}.$$

Vadinasi, taškai K, L, M, N sutampa. Tai reiškia, kad visos gretasienio įstrižainės susikerta viename taške; tas taškas kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.

77. Turime neplokščiąją uždarąją laužtę $ABCD$. Taškai M ir N yra grandžių AD ir BC vidurio taškai. Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra komplanarūs.



53 pav.

Sprendimas

Ta laužtė pavaizduota 53 paveiksle.

Kadangi taškai M ir N yra atkarpų AD ir BC vidurio taškai, tai $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$.

Taikydami kelių vektorių sudėties taisyklę, dviem būdais randame vektorių $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$$

Šias lygybes sudėję ir pritaikę vektorių sudėties dėsnius, gauname:

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN})=\vec{0}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.$$

Iš čia randame:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Kadangi vektorius $\overrightarrow{MN}$ yra išreikštas vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra komplanarūs (remiamės pakankamąja trijų vektorių komplanarumo sąlyga).

78. Taškai M ir N yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų AD ir B_1C_1 vidurio taškai. Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$ yra komplanarūs.

Sprendimas

Iš pradžių pavaizduokime tai, kas duota sąlygoje (54 pav.). Kad būtų trumpiau, pažymėkime šitaip:

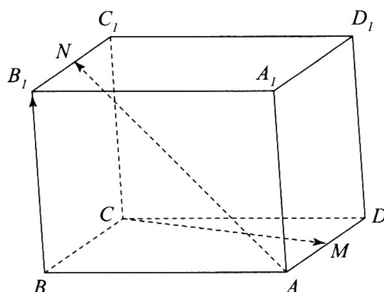
$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{AA_1}=\vec{c}.$

Tada:

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}=\vec{a}+\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}.$$



54 pav.

Iš čia gauname:

$$\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BB_1}\,.$$

Vadinasi, vektoriai $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BB_1}$ yra komplanarūs (remiamės pakankamąja trijų vektorių komplanarumo sąlyga).

79. Įrodykite, kad trys atkarpos, jungiančios trikampės piramidės priešingųjų briaunų vidurio taškus, susikerta viename taške, o tas taškas kiekvieną iš minėtų atkarpų dalija pusiau.

Sprendimas

Trikampės piramidės $ABCD$ briaunų vidurio taškus pažymėkime taip, kaip 55 paveiksle.

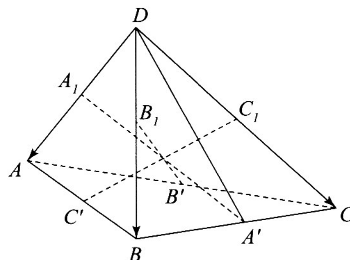
Pasirinkime tris nekomplanarius vektorius:

$\overrightarrow{DA}=\vec{a},\ \overrightarrow{DB}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c}.$

Sakykime, K – atkarpos A_1A' taškas. Tada

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1K},\ \overrightarrow{A_1K}=k\overrightarrow{A_1A'},\ 0\le k\le 1;$$

$$\overrightarrow{A_1A'}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DA'},\ \overrightarrow{DA'}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$



55 pav.

(čia taikėme dviejų nekolinearių vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę ir lygiagretainio įstrižainių savybę). Taip gauname:

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\vec{a}+k\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right),\ \overrightarrow{DK}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right)\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}.$$

Tarę, kad M ir N yra atkarpų B_1B' ir C_1C' vidurio taškai ir

$\overrightarrow{B_1M}=m\overrightarrow{B_1B'},\ 0\le m\le 1,\ \overrightarrow{C_1N}=n\overrightarrow{C_1C'},\ 0\le n\le 1,$

panašiai gautume:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}m\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m\right)\vec{b} + \frac{1}{2}m\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}n\vec{a} + \frac{1}{2}n\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right)\vec{c}$$

(rašant šias lygybes, buvo galima vektoriaus $\overrightarrow{DK}$ išraiškoje tinkamai pakeisti tik raides). Atkarpos A_1A', B_1B', C_1C' viename taške susikirs tada ir tik tada, kai

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN}.$

Kadangi vektorius trimis nekomplanariais vektoriais išreiškiamas vienareikšmiškai, tai turėtų būti:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}m;$$

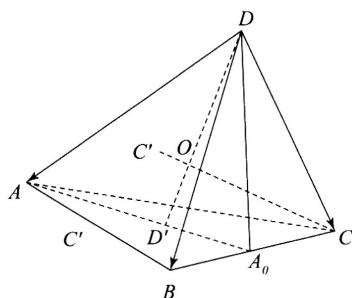
$$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n.$$

Iš šių lygčių randame: $k = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. Vadinasi, atkarpos A_1A', B_1B', C_1C' susikerta viename taške. Pažymėkime jį raide P. Tada gausime:

$$\overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A'},\ \overrightarrow{B_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B'},\ \overrightarrow{C_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C'},$$

t. y. taškas P kiekvieną iš atkarpų A_1A', B_1B', C_1C' dalija pusiau.

80. Trikampės piramidės kiekviena viršūnė su priešingos sienos pusiaukraštinių susikirtimo tašku sujungta atkarpa. Įrodykite, kad tos keturios atkarpos susikerta viename taške, o jis kiekvieną jų dalija santykiu 3 : 1 (pradedant nuo viršūnės).



56 pav.

Sprendimas

Nagrinėkime trikampę piramidę $ABCD$ (56 pav.). Paveiksle dar pavaizduota: atkarpos BC vidurio taškas A_0 ir sienų ABC bei ABD pusiaukraštinių susikirtimo taškai D' bei C'. Piramidės sienų BCD ir CAD pusiaukraštinių susikirtimo taškai A' ir B' paveiksle nepavaizduoti.

Pasirinkime tris nekomplanarius vektorius:

$\overrightarrow{DA} = \vec{a},\ \overrightarrow{DB} = \vec{b},\ \overrightarrow{DC} = \vec{c}.$

Sakykime, P, N, M, K yra atkarpų DD', CC', BB', AA' taškai. Tada

$$\overrightarrow{DP} = p\overrightarrow{DD'},\ \overrightarrow{CN} = n\overrightarrow{CC'},\ \overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BB'},\ \overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AA'},$$

$0 \le p \le 1$, $0 \le n \le 1$, $0 \le m \le 1$, $0 \le k \le 1$.

Rasime vektorius $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(čia rėmėmės trikampio pusiaukraštinių savybe, vektorių sudėties lygiagretainio taisykle ir lygiagretainio įstrižainių savybe).

Panašiai randame:

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Dabar taškus P, N, M, K galime apibūdinti vektoriais:

$$\overrightarrow{DP} = p\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{3}p\vec{a} + \frac{1}{3}p\vec{b} + \frac{1}{3}p\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + n\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}n\vec{a} + \frac{1}{3}n\vec{b} + (1-n)\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}m\vec{a} + (1-m)\vec{b} + \frac{1}{3}m\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{AA'} = (1-k)\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}.$$

Atkarpos AA', BB', CC', DD' viename taške susikirs tada ir tik tada, kai

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DP}$.

Kadangi vektorius trimis nekomplanariais vektoriais išreiškiamas vienareikšmiškai, tai turėtų būti:

$$\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}n,\ \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}n,\ \frac{1}{3}p = 1-n$$

$$\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}m,\ \frac{1}{3}p = 1-m,\ \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}m$$

$$\frac{1}{3}p = 1-k,\ \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}k,\ \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}k.$$

Iš šių lygčių randame:

$$k = \frac{3}{4},\ m = \frac{3}{4},\ n = \frac{3}{4},\ p = \frac{3}{4}.$$

Tai, kad lygčių sistema turi sprendinį, reiškia, jog atkarpos AA', BB', CC', DD' susikerta viename taške. Pažymėkime jį raide O (vietoj buvusių K, M, N, P). Tada

$$\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{BO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BB'},\ \overrightarrow{CO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'},\ \overrightarrow{DO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}.$$

Be to, aišku, kad taškas O atkarpas AA', BB', CC', DD' dalija tuo pačiu santykiu $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3:1.$

81. Įrodykite, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė AC_1 eina per trikampių A_1BD ir CB_1D_1 pusiaukraštinių susikirtimo taškus ir tie taškai dalija ją į tris lygias dalis.

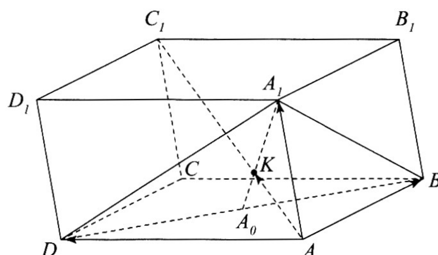
Sprendimas

Pasirinkime tris nekomplanarius vektorius:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{AA_1}=\vec{c}.$$

Jais išreikškime vektorių $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$



57 pav.

Vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ išreikšime ir vektorių $\overrightarrow{AK}$ (K – trikampio A_1BD pusiaukraštinių susikirtimo taškas (57 pav.)).

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1K}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_0};$$

čia A_0 – trikampio A_1BD kraštinės BD vidurio taškas;

$$\overrightarrow{A_1A_0}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DA_0}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).$$

Gautus rezultatus įrašę į vektoriaus $\overrightarrow{AK}$ išraišką, gauname:

$$\overrightarrow{AK}=\vec{c}+\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}.$$

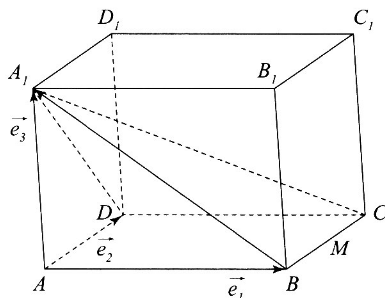
Palyginę vektorių $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{AK}$ išraiškas, gauname $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

Vadinasi, gretasienio įstrižainė AC_1 eina per trikampio A_1BD pusiaukraštinių susikirtimo tašką K ir, pradedant nuo gretasienio viršūnės A, atkerta $\frac{1}{3}$ tos įstrižainės.

Panašiai įrodytume, kad gretasienio įstrižainė AC_1 eina per trikampio CB_1D_1 pusiaukraštinių susikirtimo tašką, o tas taškas, pradedant nuo viršūnės C_1, atkerta $\frac{1}{3}$ tos įstrižainės. (Beje, įrodymui pakaktų pervardyti gretasienio viršūnes.)

Taigi gretasienio įstrižainė AC_1 eina per trikampių A_1BD ir CB_1D_1 pusiaukraštinių susikirtimo taškus, o tie taškai įstrižainę dalija į tris lygias dalis.

82. Baziniais vektoriais $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ laikomi gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$. Raskite gretasienio sienų įstrižainių vektorių ir gretasienio įstrižainės, išeinančios iš viršūnės A_1, vektoriaus koordinates.



58 pav.

Sprendimas

Kad būtų patogiau spręsti, pavaizduokime gretasienį ir minėtas įstrižaines (58 pav.).

Vektoriaus koordinatės yra vektoriaus išraiškos baziniais vektoriais koeficientai (parinkti ta pačia tvarka, kaip ir baziniai vektoriai). Rasime tas išraiškas ir vektorių koordinates.

$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = -\vec{e_3} + \vec{e_1} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} + (-1)\vec{e_3}$, $\overrightarrow{A_1B}$ (1; 0; –1);

$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} = 1 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} + 0 \cdot \vec{e_3}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ (1; 1; 0);

$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = -\vec{e_3} + \vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} + (-1)\vec{e_3}$, $\overrightarrow{A_1D}$ (0; 1; –1);

$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} = \vec{e_1} - \vec{e_3} + \vec{e_2} = 1 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} + (-1)\vec{e_3}$, $\overrightarrow{A_1C}$ (1; 1; –1).

83. Ar taškai A (5; 2; –1), B (1; –3; 4), C (–2; 1; 3), D (2; 6; –2) yra lygiagretainio $ABCD$ viršūnės?

Sprendimas

Kad taškai A, B, C, D būtų lygiagretainio $ABCD$ viršūnės, būtina, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ būtų lygūs. Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ koordinates:

$\overrightarrow{AB}$ (1 – 5; –3 – 2; 4 – (–1)), t. y. $\overrightarrow{AB}$ (–4; –5; 5);

$\overrightarrow{DC}$ (–2 – 2; 1 – 6; 3 – (–2)), t. y. $\overrightarrow{DC}$ (–4; –5; 5).

Gavome, kad vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ atitinkamos koordinatės yra lygios. Vadinasi, ir vektoriai yra lygūs: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Kad tie vektoriai nusakytų lygiagretainį, taškai A, B, C, D (pakanka ir A, B, C) neturi būti vienoje tiesėje. Todėl dar randame vektorių $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC}$ (–2 – 5; 1 – 2; 3 – (–1)), t. y. $\overrightarrow{AC}$ (–7; –1; 4).

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ koordinatės nėra proporcingos, todėl taškai A, B, C nėra vienoje tiesėje. Vadinasi, taškai A, B, C, D yra lygiagretainio $ABCD$ viršūnės.

84. Vektoriai $\vec{a}$ (x; 5; –1) ir $\vec{b}$ (3; 1; z) kolinearūs. Raskite skaičius x ir z.

Sprendimas

Kolinearių vektorių atitinkamos koordinatės yra proporcingos, todėl

$\frac{x}{3}=\frac{5}{1}=\frac{-1}{z}.$

Iš pirmo ir antro bei antro ir trečio santykių lygumo gauname:

$x = 15, 5z = -1.$

Taigi $x = 15$, $z = -0{,}2$.

85. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{a}(2; -1; 3)$ ir $\vec{b}(-6; 3; -9)$ yra kolinearūs. Kuris vektorius ir kiek kartų ilgesnis? Palyginkite vektorių kryptis.

Sprendimas

Palyginame vektorių atitinkamų koordinačių santykius. Jie lygūs:

$$\frac{-6}{2}=\frac{3}{-1}=\frac{-9}{3}=-3.$$

Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs $(\vec{a} \parallel \vec{b})$ ir $\vec{b}=-3\vec{a}$.

Tada $|\vec{b}|=|-3||\vec{a}|$, $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$,

t. y. vektorius $\vec{b}$ tris kartus ilgesnis už vektorių $\vec{a}$.

Kadangi vektorius $\vec{b}$ gaunamas vektorių $\vec{a}$ padauginus iš neigiamo skaičiaus (–3), tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra priešpriešiniai (jų kryptys yra priešingos).

86. Patikrinkite, ar vektoriai $\vec{a}(5; 2; 1)$, $\vec{b}(-1; 4; 2)$, $\vec{c}(-1; -1; 6)$ yra komplanarūs.

Sprendimas

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atitinkamos koordinatės neproporcingos, todėl tie vektoriai nekolinearūs ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$). Jei vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarūs, tai vektorių $\vec{c}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, ir atvirkščiai.

Tarkime, kad

$\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}.$

Kadangi

$(k\vec{a}+m\vec{b})(5k-m;\ 2k+4m;\ k+2m),$

o lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios, tai skaičiams k ir m rasti turime šitokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases}5k-m=-1,\\2k+4m=-1,\\k+2m=6.\end{cases}$$

Jei ši lygčių sistema turi sprendinį, tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra komplanarūs, jei neturi sprendinio – nekomplanarūs.

Šiuo atveju lygčių sistema neturi sprendinio, nes antrosios ir trečiosios lygčių k ir m koeficientai proporcingi, o laisvieji nariai neproporcingi. Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra nekomplanarūs.

87. Ar taškai $A\ (3; -1; 2)$, $B\ (1; 2; -1)$, $C\ (-1; 1; -3)$, $D\ (3; -5; 3)$ yra trapecijos $ABCD$ viršūnės?

Sprendimas

Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ koordinates:

$\overrightarrow{AB}(1-3; 2-(-1); -1-2)$, t. y. $\overrightarrow{AB}(-2; 3; -3)$;

$\overrightarrow{BC}(-1-1; 1-2; -3-(-1))$, t. y. $\overrightarrow{BC}(-2; -1; -2)$;

$\overrightarrow{CD}(3-(-1); -5-1; 3-(-3))$, t. y. $\overrightarrow{CD}(4; -6; 6)$;

$\overrightarrow{DA}(3-3; -1-(-5); 2-3)$, t. y. $\overrightarrow{DA}(0; 4; -1)$.

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra kolinearūs $(\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB})$ ir priešpriešiniai, o vektoriai $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{DA}$ nekolinearūs, tai taškai A, B, C, D yra trapecijos $ABCD$ viršūnės.

88. Duoti taškai: $A\ (-1; 5; -10)$, $B\ (5; -7; 8)$, $C\ (2; 2; -7)$, $D\ (5; -4; 2)$.

Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra kolinearūs. Kuris vektorius ir kiek kartų ilgesnis? Palyginkite vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ kryptis.

Sprendimas

Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ koordinates:

$\overrightarrow{AB}(5-(-1); -7-5; 8-(-10))$, t. y. $\overrightarrow{AB}(6; -12; 18)$;

$\overrightarrow{CD}(5-2; -4-2; 2-(-7))$, t. y. $\overrightarrow{CD}(3; -6; 9)$.

Palyginę vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ koordinates (jos proporcingos), įsitikiname, kad $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.

Vadinasi, vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra kolinearūs. Kadangi skaitinis dauginamasis (2) teigiamas, tai tie vektoriai yra vienakrypčiai.

Iš $|\overrightarrow{AB}| = |2||\overrightarrow{CD}| = 2|\overrightarrow{CD}|$ darome išvadą, kad vektorius $\overrightarrow{AB}$ yra du kartus ilgesnis už vektorių $\overrightarrow{CD}$.

89. Patikrinkite, ar komplanarūs šie vektoriai:

a) $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;

b) $\vec{a}(3; 2; -1)$, $\vec{b}(2; 1; 2)$, $\vec{c}(3; -1; -2)$;

c) $\vec{a}(6; -18; 12)$ $\vec{b}(-8; 24; -16)$, $\vec{c}(8; 7; 3)$.

Jei galima, vektorių $\vec{c}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

Sprendimas

a) Sakykime, $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$. Tada
(1; 9; –11) = (2k + m; 3k – m; –k + 3m)
(čia rėmėmės šitokia taisykle: kokie veiksmai (sudėtis ar daugyba iš skaičiaus) atliekami su vektoriais, tokie veiksmai atliekami su jų atitinkamomis koordinatėmis). Lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios, todėl koeficientams k ir m rasti gauname šitokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2k + m = 1, \\ 3k - m = 9, \\ -k + 3m = -11. \end{cases}$$

Iš pirmų dviejų lygčių randame: k = 2, m = –3. Šios k ir m reikšmės tenkina ir trečią lygtį (–2 + 3 · (–3) = –11), todėl vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra komplanarūs. Be to, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

b) Sakykime, $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$. Tada, kaip ir a) atveju, gauname šitokią lygčių sistemą koeficientams k ir m rasti:

$$\begin{cases} 3k + 2m = 3, \\ 2k + m = -1, \\ -k + 2m = -2. \end{cases}$$

Iš pirmos ir antros lygčių randame: k = – 5, m = 9. Kadangi –(–5) + 2 · 9 = 23 ≠ –2, t. y. iš pirmų dviejų lygčių rasti k ir m netenkina trečios lygties, tai nagrinėjama trijų lygčių sistema neturi sprendinio. Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra nekomplanarūs, vektoriaus $\vec{c}$ negalima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

c) Sakykime, $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.
Kaip ir a) bei b) atvejais, galėtume sudaryti atitinkamą lygčių sistemą. Įsitikintume, kad vektoriaus $\vec{c}$ negalima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

Tačiau negalime teigti, kad vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra nekomplanarūs.

Kadangi vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atitinkamos koordinatės yra proporcingos

(6 : (–8) = (–18) : 24 = 12 : (–16)), tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs. Tada vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra komplanarūs. Vektorius $\vec{c}$ nekolinearus su vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, todėl vektoriaus $\vec{c}$ negalima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

90. Patikrinkite, ar šie keturi taškai yra vienoje plokštumoje:
a) A (3; 1; 0), B (0; 7; 2), C (–1; 0; –5), D (4; 1; 5);
b) A (1; –1; 1), B (0; 2; 4), C (1; 3; 3), D (4; 0; –3).

Sprendimas

Norint patikrinti, ar taškai A, B, C, D yra vienoje plokštumoje, pakanka patikrinti, ar trys vektoriai, pavyzdžiui, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, yra komplanarūs.

a) Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ koordinates:

$\overrightarrow{AB}(0-3;\ 7-1;\ 2-0)$, t. y. $\overrightarrow{AB}(-3;\ 6;\ 2)$,

$\overrightarrow{AC}(-1-3;\ 0-1;\ -5-0)$, t. y. $\overrightarrow{AC}(-4;\ -1;\ -5)$,

$\overrightarrow{AD}(4-3;\ 1-1;\ 5-0)$, t. y. $\overrightarrow{AD}(1;\ 0;\ 5)$.

Jokie du iš šių trijų vektorių nėra kolinearūs, nes jokių dviejų vektorių atitinkamos koordinatės nėra proporcingos. Todėl patikrinsime, ar vieną vektorių galima išreikšti kitais dviem vektoriais.

Sakykime, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$. Tada
$(1;\ 0;\ 5) = (-3k-4m;\ 6k-m;\ 2k-5m)$.

Lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios, todėl gauname šitokią lygčių sistemą skaičiams k ir m rasti:

$$\begin{cases} -3k-4m=1, \\ 6k-m=0, \\ 2k-5m=5. \end{cases}$$

Iš pirmų dviejų lygčių randame: $k=-\dfrac{1}{27}$, $m=-\dfrac{6}{27}$.

Kadangi $2\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)-5\cdot\left(-\dfrac{6}{27}\right)=\dfrac{28}{27}\neq 5$, t. y. rastos k ir m reikšmės netenkina trečios lygties, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ nekomplanarūs, taškai A, B, C, D nėra vienoje plokštumoje.

Pastabos.

1. Išvada nepriklauso nuo to, kad vektorių $\overrightarrow{AD}$, o ne kurį kitą, bandėme išreikšti vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Jei tartume, kad lygybė $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AD}$ yra teisinga, tai turėtų būti $n \neq 0$, $p \neq 0$ (priešingu atveju du iš trijų vektorių būtų kolinearūs).

Bet tokiu atveju ir vektorių $\overrightarrow{AB}$, ir vektorių $\overrightarrow{AD}$ būtų galima išreikšti kitais dviem vektoriais.

2. Išvada nepriklauso ir nuo to, kurį tašką pasirinksime vektorių pradžia.

Pavyzdžiui, lygybę $\overrightarrow{BD} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BC}$, išreiškiančią galimybę vektorių $\overrightarrow{BD}$ išreikšti vektoriais $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$, galima pertvarkyti šitaip:

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = a(-\overrightarrow{AB}) + b(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),$

$\overrightarrow{AD} = (1 - a - b)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$

Ji išreiškia galimybę vektorių $\overrightarrow{AD}$ išreikšti vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.

b) Sprendžiama panašiai kaip a) atveju.

Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ koordinates:

$\overrightarrow{AB}$ (0 – 1; 2 – (–1); 4 – 1), t. y. $\overrightarrow{AB}$ (–1; 3; 3);

$\overrightarrow{AC}$ (1 – 1; 3 – (–1); 3 – 1), t. y. $\overrightarrow{AC}$ (0; 4; 2);

$\overrightarrow{AD}$ (4 – 1; 0 – (–1); –3 – 1), t. y. $\overrightarrow{AD}$ (3; 1; –4).

Sakykime, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$. Tada skaičiams k ir m rasti turime šitokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -k = 3, \\ 3k + 4m = 1, \\ 3k + 2m = -4. \end{cases}$$

Iš pirmų dviejų lygčių randame: $k = -3$, $m = 2{,}5$. Kadangi $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2{,}5 = -4$, tai

$\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB} + 2{,}5\overrightarrow{AC}.$

Vadinasi, vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ yra komplanarūs (remiamės trijų vektorių komplanarumo pakankamąja sąlyga), taškai A, B, C, D yra vienoje plokštumoje.

10. Plokštumos judesiai ir figūrų lygumas

Iš figūrų palyginimo būdų (pastumiant, pasukant, apverčiant) išsamiau išnagrinėjome tik vieną – lygiagretųjį postūmį. Prisiminę atstumo matavimą, galime teigti, kad lygiagretusis postūmis nekeičia atstumo. Tačiau kol kas galime lyginti tik lygiagrečių ar vienoje tiesėje esančių atkarpų ilgius. Taigi reikėtų aiškiau aptarti ir kitus, anksčiau minėtus, palyginimo būdus. Atkreipus dėmesį į kitas lygiagrečiojo postūmio savybes, apibrėžiama bendresnė sąvoka – plokštumos transformacija. Iš visų plokštumos transformacijų išskiriamos atstumo nekeičiančios plokštumos transformacijos, trumpiau – plokštumos judesiai.

Apibrėžus judesius, konkrečiau apibrėžiamos ir lygios figūros.

Prieš pradedant nagrinėti toliau, prisimenamas praktiškas pastebėjimas – „trumpiausias atstumas tarp dviejų taškų yra juos jungiančios atkarpos ilgis“, ir formuluojama dar viena aksioma, kuri vadinama trikampio nelygybe.

Kaip vienas iš svarbesnių rezultatų yra įrodymas, kad judesys nekeičia tiesės taškų tvarkos. Remiantis juo įrodoma, kad judesiu tiesė atvaizduojama į tiesę. Čia svarbu atkreipti dėmesį į įrodymo būdą.

Norint įrodyti, kad figūra F atvaizduojama į figūrą F', reikia įrodyti: kiekvieno figūros F taško vaizdas yra figūros F' taškas; kiekvienas figūros F' taškas yra kurio nors figūros F taško vaizdas.

Tai įsisąmoninus, pateiktas užduotis turėtų būti nesunku atlikti.

Apibrėžus dar vieną judesį – centrinę simetriją (posūkį per pusę apsisukimo), įrodoma daug planimetrijos teoremų. Pateikus apibrėžimą ir teoremų įrodymo pavyzdžių, daug užduočių pateikta moksleiviams. Jos turėtų būti nesunkiai įveikiamos.

Atkreiptinas dėmesys į kryžminių kampų savybės įrodymą.

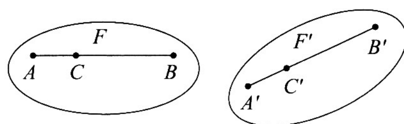
Kampu laikoma dviejų pusplokštumių sankirta, tad ir minint kampo vaizdą tenka kalbėti apie tų pusplokštumių vaizdus. Kad būtų trumpiau, dažnai tenkinamasi kampo kraštinių vaizdais.

Uždaviniai

91. Įrodykite, kad judesiu iškiloji figūra atvaizduojama į iškiląją figūrą.

Sprendimas

Nagrinėkime iškiląją figūrą F (59 pav.) ir judesį j. Figūros F vaizdą, gautą judesiu j, pažymėkime F', t. y. figūrą F' sudaro figūros F visų taškų vaizdai, gauti judesiu j, ir tik jie. Sakykime, A' ir B' – figūros F' bet kurie taškai. Reikia įrodyti, kad atkarpos $A'B'$ kiekvienas taškas yra figūros F' taškas.



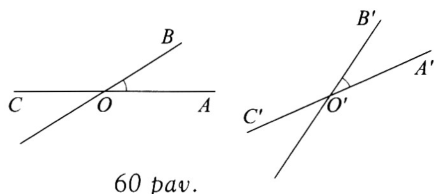
59 pav.

Judesiui j atvirkštiniu judesiu j^{-1} taškai A' ir B' atvaizduojami į figūros F tam tikrus taškus A ir B.

Įrodoma, kad judesiu atkarpa atvaizduojama į atkarpą.

Sakykime, C' – bet kuris atkarpos $A'B'$ taškas. Judesiu j^{-1} jis atvaizduojamas į atkarpos AB tam tikrą tašką C. Tada judesiu j taškas C atvaizduojamas į tašką C'. Taškas C' priklauso atkarpai $A'B'$. Kaip taško C vaizdas, gautas judesiu j, jis priklauso ir figūrai F'.

92. Įrodykite: jei kampai yra lygūs, tai ir jiems gretutiniai kampai yra lygūs.



60 *pav.*

Sprendimas

Nagrinėkime du lygius kampus, pavyzdžiui, $\angle AOB$ ir $\angle A'O'B'$ (60 pav.; $\angle AOB = \angle A'O'B'$).

Kadangi $\angle AOB = \angle A'O'B'$, tai yra judesys, kuriuo kampas AOB atvaizduojamas į kampą $A'O'B'$. Pažymėkime tą judesį raide j.

Sakykime, judesiu j spindulys OA atvaizduojamas į spindulį $O'A'$, spindulys OB – į spindulį $O'B'$.

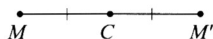
Žinome, kad judesiu tiesė atvaizduojama į tiesę. Įrodoma, kad judesiu spindulys atvaizduojamas į spindulį. Iš to gauname, kad judesiu spindulio OA papildomasis spindulys OC atvaizduojamas į spindulio $O'A'$ papildomąjį spindulį $O'C'$. Iš to gauname, kad judesiu j kampas BOC atvaizduojamas į kampą $B'O'C'$. Tokie kampai yra lygūs: $\angle BOC = \angle B'O'C'$.

Liko prisiminti, kad jie yra lygių kampų AOB ir $A'O'B'$ gretutiniai kampai.

93. Raskite centrinei simetrijai S_C atvirkštinę transformaciją.

Sprendimas

Prisiminkime, kad transformacija, kuria kiekvienas taškas atvaizduojamas į jam simetrišką kurio nors taško atžvilgiu tašką, vadinama centrine simetrija. Tas taškas vadinamas simetrijos centru.



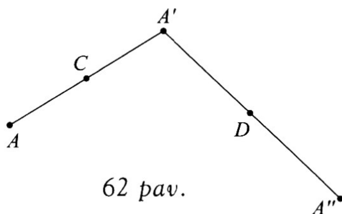
61 *pav.*

Taškai A ir A' vadinami simetriškais taško C atžvilgiu, kai taškas C yra atkarpos AA' vidurio taškas; taškui C simetriškas taško C atžvilgiu yra jis pats.

Nagrinėkime centrinę simetriją S_C. Ja taškas C atvaizduojamas į jį patį. Kai taškas M atvaizduojamas į tašką M', taškas C yra atkarpos MM' vidurio taškas. Tada išeina, kad taškas M' atvaizduojamas į tašką M (61 pav.).

Centrinei simetrijai S_C atvirkštine transformacija taškas C atvaizduojamas į jį patį, o taškas M' – į tašką M. Vadinasi, simetrijai S_C atvirkštinė transformacija yra ji pati: $S_C^{-1} = S_C$.

94. Įrodykite, kad centrinių simetrijų S_C ir S_D kompozicija yra lygiagretusis postūmis per vektorių $2\overrightarrow{CD}$. Ar centrinių simetrijų kompozicijai sudaryti tinka perstatomumo (komutatyvumo) dėsnis?



62 *pav.*

Sprendimas

Sakykime, A – bet kuris taškas, simetrija S_C jis atvaizduojamas į tašką A', o taškas A' simetrija S_D atvaizduojamas į tašką A'' (62 pav.). Tada taškas A'' yra taško A vaizdas, gautas kompozicija $S_D \circ S_C$.

Nagrinėkime vektorių $\overrightarrow{AA''}$. Remdamiesi centrinės simetrijos apibrėžimu, turime:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DA''}$.

Tada

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{A'D} = 2(\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'D}) = 2\overrightarrow{CD}$,

todėl

$S_D \circ S_C = T_{2\overrightarrow{CD}}$.

Kadangi

$S_C \circ S_D = T_{2\overrightarrow{DC}}$,

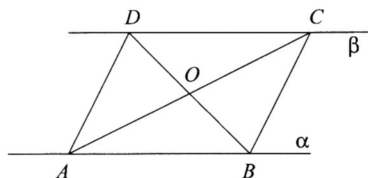
o $2\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DC}$ tik tada, kai $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$, tai bendruoju atveju

$S_D \circ S_C \neq S_C \circ S_D$.

Vadinasi, centrinių simetrijų kompozicijai sudaryti perstatomumo (komutatyvumo) dėsnis netinka.

95. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas yra lygiagretainio simetrijos centras.

Sprendimas



63 pav.

Nagrinėkime lygiagretainį $ABCD$. Sakykime, O – jo įstrižainių susikirtimo taškas (63 pav.). Reikia įrodyti, kad simetrija S_O lygiagretainis $ABCD$ atvaizduojamas į jį patį.

Lygiagretainis $ABCD$ yra keturių pusplokštumių sankirta. Pasirinkime dvi iš jų: pusplokštumę α, kurią riboja tiesė AB ir kuriai priklauso taškas O, bei pusplokštumę β, kurią riboja tiesė CD ir kuriai priklauso taškas O.

Simetija S_O taškus A ir B atvaizduoja į taškus C ir D, todėl tiesę AB atvaizduoja į tiesę CD (bendra visų judesių savybė).

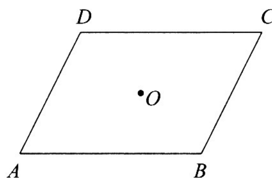
Įrodoma, kad judesiu pusplokštumė atvaizduojama į pusplokštumę. Kadangi simetrija S_O tašką O atvaizduoja į jį patį, tai pusplokštumę α ji atvaizduoja į pusplokštumę β. Aišku, kad simetrija S_O pusplokštumę β atvaizduoja į pusplokštumę α.

Panašiai įrodytume, kad ir kitos dvi pusplokštumės atvaizduojamos viena į kitą.

Vadinasi, lygiagretainio $ABCD$ vaizdas yra tų pačių anksčiau minėtų keturių pusplokštumių sankirta, t. y. jis pats. Iš to ir gauname, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas yra to lygiagretainio simetrijos centras.

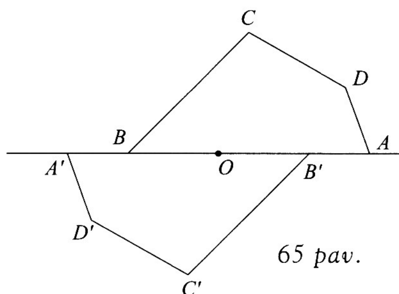
96. Įrodykite, kad keturkampis, turintis simetrijos centrą, yra lygiagretainis.

Sprendimas



64 pav.

Sakykime, O – keturkampio $ABCD$ simetrijos centras (64 pav.). Kitaip: simetrija S_O keturkampis $ABCD$ atvaizduojamas į jį patį.



65 *pav.*

Taškų A, B, C, D vaizdus, gautus simetrija S_O, pažymėkime A', B', C', D'. Tada tiesės $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ yra tiesių AB, BC, CD, DA vaizdai.

Tiesė $A'B'$ lygiagreti su tiese AB. Keturkampis $ABCD$ atvaizduojamas į jį patį, todėl tiesė $A'B'$ yra viena iš tiesių AB, BC, CD, DA.

Tai ne tiesė AB, nes tada tiesė AB būtų atvaizduota į ją pačią. Tokios yra tik per simetrijos centrą einančios tiesės. Vadinasi, taškas O būtų tiesėje AB. Tada taškai C' ir D' būtų kitoje tiesės AB pusėje negu taškai C ir D. Taigi keturkampis $ABCD$ nebūtų atvaizduotas į jį patį (65 pav.).

Panašiai įrodytume, kad tai ne tiesė BC ir ne tiesė DA.

Vadinasi, tiesė $A'B'$ yra tiesė CD. Taigi $AB \parallel CD$.

Panašiai įrodytume, kad $BC \parallel DA$.

Gavome, kad keturkampio $ABCD$ priešingos kraštinės yra lygiagrečios. Toks keturkampis yra lygiagretainis.

97. Centrinės simetrijos centras yra taškas $C\ (a;\ b)$. Sudarykite centrinės simetrijos lygtis, t. y. taško $M\ (x;\ y)$ vaizdo $M'\ (x';\ y')$ koordinates išreikškite taško M koordinatėmis.

Sprendimas

Žinome, kad $\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{CM}$ (iš centrinės simetrijos apibrėžimo), arba, išreiškiant koordinatėmis,

$(a - x';\ b - y') = (x - a;\ y - b)$.

Lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios, todėl

$a - x' = x - a;\ b - y' = y - b$.

Iš čia ir gauname ieškomas centrinės simetrijos lygtis:

$x' = -x + 2a,$

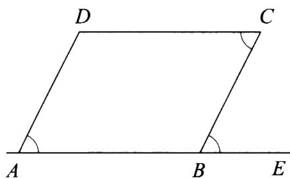
$y' = -y + 2b.$

98. Įrodykite, kad lygiagretainio:

a) priešingieji kampai yra lygūs;

b) prie vienos kraštinės esančių kampų suma yra ištiestinis kampas.

Sprendimas



66 *pav.*

Lygiagretainio $ABCD$ (66 pav.) kampas A lygus kampo B priekampiui CBE, nes jie yra lygiagrečiųjų tiesių AD ir BC bei jų kirstinės AB sudaryti atitinkamieji kampai. Tam pačiam priekampiui lygus ir lygiagretainio kampas C, nes tie du kampai yra lygiagrečiųjų tiesių DC ir AB bei jų kirstinės CB sudaryti priešiniai kampai.

Vadinasi, $\angle A = \angle C$.

Taip pat įrodytume, kad ir kiti du priešingieji lygiagretainio kampai yra lygūs.

Prie lygiagretainio kraštinės esantys kampai yra dviejų lygiagrečiųjų tiesių ir jų kirstinės sudaryti vienašaliai kampai, todėl jų suma yra ištiestinis kampas.

11. Erdvės judesiai ir figūrų lygumas

Erdvės judesiai ir lygios figūros apibrėžiami kaip ir plokštumos judesiai ir lygios figūros. Įrodyta, kad judesiu plokštuma atvaizduojama į plokštumą. Supratus įrodymo esmę, pasiūlytas užduotis turėtų būti nesunku atlikti.

12. Plokštumos tiesių statmenumas

Praktiškai statmenosios tiesės kartais gaunamos šitaip. Popieriaus lapas perlenkiamas per vidurį, paskui jis, tik kita kryptimi, dar kartą perlenkiamas per vidurį. Ištiesinus lapą, lenkimo vietos vaizduoja statmenąsias tieses.

Pradėkime iš pradžių – nuo pirmojo lenkimo. Laikome, kad abi lapo, kaip geometrinės figūros vaizdo, pusės yra vienodos. Tai užfiksuojama kaip plokštumos simetriškumo aksioma.

Paskui apibrėžiama plokštumos ašinė simetrija, randamas taškui artimiausias simetrijos ašies taškas.

Verta atkreipti dėmesį į atkarpos vidurio statmens savybės įrodymą, nes jis nesiremia trikampių lygumo požymiais (jų šioje kurso vietoje dar nėra).

Plačiau aptarsime plokštumos simetriškumo aksiomą. Ji suformuluota šitaip: yra vienintelis judesys, kuriuo kiekviena pusplokštumė atvaizduojama į papildomąją pusplokštumę; be to, kiekvienas pusplokštumių krašto taškas atvaizduojamas į jį patį.

Pirma. „Kiekviena pusplokštumė“ reiškia konkrečią (tačiau bet kurią) pusplokštumę.

Antra. Aksioma yra perteklinė. Užtektų ir tokio teiginio: yra bent vienas atstumo nekeičiantis atvaizdis, kuriuo pusplokštumė atvaizduojama į papildomąją pusplokštumę, o kiekvienas jos krašto taškas atvaizduojamas į jį patį.

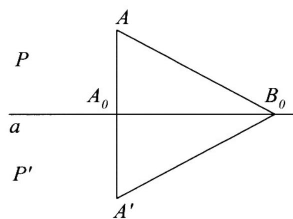
Kad tuo įsitikintume, turime įrodyti du teiginius:

a) minėtas atvaizdis yra vienintelis;

b) pagal tą atvaizdį galima apibrėžti plokštumos atvaizdį į ją pačią (plokštumos transformaciją), nekeičiančią atstumo (plokštumos judesį).

Įrodymas

a) Sakykime, a – bet kuri plokštumos tiesė. Ji riboja dvi pusplokštumes. Pažymėkime jas P ir P'. Pasirinkime vieną iš jų, pavyzdžiui, P. Sakykime, atvaizdis j_1 pusplokštumę P atvaizduoja į pusplokštumę P', kiekvieną tiesės a tašką – į jį patį, o atstumas tarp taškų vaizdų yra lygus atstumui tarp pačių taškų.



67 pav.

Sakykime, A – bet kuris pusplokštumės P taškas, nepriklausantis tiesei a, A' – taško A vaizdas, gautas atvaizdžiu j_1 (67 pav.).

Kadangi taškai A ir A' priklauso skirtingoms pusplokštumėms, tai atkarpa AA' kerta tiesę a. Susikirtimo tašką pažymėkime A_0. Kai B_0 – bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su tašku A_0, taškai A, A', B_0 nėra vienoje tiesėje, todėl

$AA' < AB_0 + B_0A'$ (remiamės trikampio nelygybe).

Kadangi taškai A, A_0, A' yra vienoje tiesėje ir taškas A_0 yra tarp taškų A ir A', tai $AA' = AA_0 + A_0A'$.

Taškų A, A_0, B_0 vaizdai, gauti atvaizdžiu j_1, yra A', A_0, B_0 ir atvaizdis j_1 nekeičia atstumo, todėl

$A'B_0 = AB_0$, $A_0A' = A_0A$.

Tada $AA_0 + A_0A < AB_0 + AB_0$, arba $AA_0 < AB_0$.

Vadinasi, taškas A_0 yra taškui A artimiausias tiesės a taškas. Aišku, toks taškas yra tik vienas.

Per taškus A ir A' eina vienintelė tiesė. Lygybė $A_0A' = A_0A$ reiškia, kad taškas A_0 yra atkarpos AA' vidurio taškas, todėl tašką A' galima gauti tiesėje AA_0 iš taško A_0 atidėjus atkarpą, lygią atkarpai A_0A. Taigi turint tašką A jį atitinkantis taškas A' nusakomas vienareikšmiškai.

b) Nagrinėkime papildomąsias pusplokštumes P ir P', kurių kraštas yra tiesė a.

Žinome, kad yra vienintelis atstumo nekeičiantis atvaizdis j_1, kuriuo pusplokštumė P atvaizduojama į pusplokštumę P', o kiekvienas tiesės a taškas atvaizduojamas į jį patį. Yra vienintelis atstumo nekeičiantis atvaizdis j_2, kuriuo pusplokštumė P' atvaizduojama į pusplokštumę P, o kiekvienas tiesės a taškas atvaizduojamas į jį patį. Aišku, kad atvaizdis j_2 yra atvirkštinis atvaizdžiui j_1, t. y. $j_2 = j_1^{-1}$.

Taigi tardami, kad $j(A) = j_1(A) = A'$ (A – pusplokštumės P, A' – pusplokštumės P' taškas) ir $j(A') = j_2(A') = j^{-1}(A')$, apibrėžiame plokštumos transformaciją. Įsitikinsime, kad transformacija j yra judesys.

Pakanka įsitikinti, kad $K'L' = KL$, kai K ir L yra skirtingų pusplokštumių taškai: čia $K' = j(K)$, $L' = j(L)$.

Sakykime, K yra pusplokštumės P taškas, L – pusplokštumės P' taškas, o K_0 – tiesių a ir KL susikirtimo taškas (68 pav.). Tada

$K'L' \leq K'K_0 + K_0L' = KK_0 + K_0L = KL$, t. y. $K'L' \leq KL$.

Kadangi $j^{-1}(K') = K$, $j^{-1}(L') = L$, tai panašiai gautume, kad $KL \leq K'L'$.

Iš $K'L' \leq KL$ ir $KL \leq K'L'$ gauname, kad $K'L' = KL$.

68 pav.

Judesys j vadinamas simetrija tiesės (a) atžvilgiu, atspindžiu tiesėje (a) arba tiesiog ašine simetrija. Ją žymėsime S_a.

Tiesė a vadinama simetrijos ašimi. Atitinkamieji taškai (A ir A', jie atvaizduojami vienas į kitą) vadinami simetriškais tiesės a atžvilgiu taškais. Aišku, kad kiekvienam tiesės a taškui simetriškas taškas yra jis pats.

13. Trikampių lygumo požymiai

Šiame skyriuje pagrindžiami labai svarbūs geometrijai trikampių lygumo požymiai. Tagi šį tą prisiminkime.

Iš pradžių, norėdami palyginti trikampius, juos kirpdavome iš popieriaus ir stengdavomės vieną sutapdinti su kitu, t. y. lygindavome tam tikrais fiziniais veiksmais. Tie veiksmai šiek tiek reglamentuoti: pastumiant, pasukant, apverčiant.

Tačiau greit paaiškėjo, kad toks tiesioginio lyginimo būdas dažniausiai yra neprieinamas. Tad trikampiai pradėti lyginti pagal pagrindinius jų elementus. Palyginimas irgi yra jau tik įsivaizduojamas.

Bet ir įsivaizduoti galima įvairiai, todėl reikia tam tikrų taisyklių, kurios būtų vienodai taikomos. Tą leistinų priemonių rinkinį gavome išnagrinėję lygiagretųjį postūmį, centrinę simetriją, ašinę simetriją.

Remdamiesi tų transformacijų savybėmis, įrodome, kad judesiu:

tiesę galima atvaizduoti į bet kurią tiesę;

spindulį galima atvaizduoti į bet kurį spindulį;

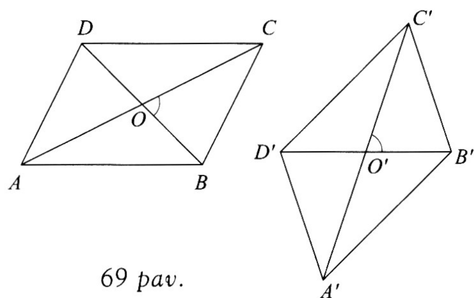
pusplokštumę galima atvaizduoti į bet kurią pusplokštumę.

Šiais teiginiais ir pagrindžiami visi trys trikampių lygumo požymiai. Be to, požymių įrodymai paprasti (ne tokie abstraktūs, kaip įprasta) ir vaizdūs.

Uždaviniai

99. Vieno lygiagretainio įstrižainės ir kampas tarp jų yra lygūs kito lygiagretainio įstrižainėms ir kampui tarp jų. Įrodykite, kad tie lygiagretainiai yra lygūs.

Sprendimas



69 *pav.*

Nagrinėkime lygiagretainius $ABCD$ ir $A'B'C'D'$ (69 pav.). Duota: $AC = A'C'$, $BD = B'D'$, $\angle COB = \angle C'O'B'$. Reikia įrodyti, kad lygiagretainis $ABCD$ yra lygus lygiagretainiui $A'B'C'D'$, arba, prisiminus lygių figūrų apibrėžimą, kad yra judesys, kuriuo lygiagretainis $ABCD$ atvaizduojamas į lygiagretainį $A'B'C'D'$.

Iš uždavinio sąlygos gauname: $OC = O'C'$, $OB = O'B'$. Prisiminę dar tai, kad $\angle COB = \angle C'O'B'$, darome išvadą: $\Delta BOC = \Delta B'O'C'$ (remiamės trikampių lygumo pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų požymiu). Vadinasi, yra judesys, kuriuo trikampis BOC atvaizduojamas į trikampį $B'O'C'$. Pažymėkime tą judesį raide j. Įrodysime, kad judesiu j lygiagretainis $ABCD$ (kaip pusplokštumių sankirta), atvaizduojamas į lygiagretainį $A'B'C'D'$.

Kadangi judesiu j taškai O, B, C atvaizduojami į taškus O', B', C', tai judesiu j tiesės OB

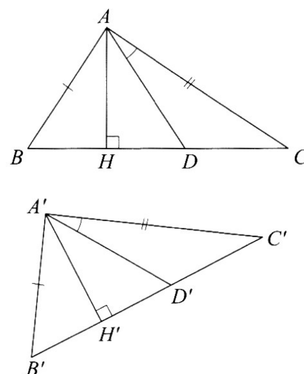
ir OC atvaizduojamos į tieses $O'B'$ ir $O'C'$. Dar daugiau: spinduliai OB ir OC atvaizduojami į spindulius $O'B'$ ir $O'C'$. Tada jų papildomieji spinduliai OD ir OA atvaizduojami į spindulius $O'D'$ ir $O'A'$. Kadangi $OB = OD$, $OC = OA$, o judesys nekeičia atstumo, tai taškai D ir A atvaizduojami į taškus D' ir A'.

Nagrinėkime, pavyzdžiui, pusplokštumę, kurią riboja tiesė AB ir kuriai priklauso taškas O. Judesiu j ta pusplokštumė atvaizduojama į pusplokštumę, kurią riboja tiesė $A'B'$ ir kuriai priklauso taškas O'.

Nagrinėta pusplokštumė yra viena iš tų keturių pusplokštumių, kurių sankirta yra lygiagretainis. Aišku, tą patį galima pasakyti apie kitas tris pusplokštumes. Iš to ir gauname, kad judesiu j lygiagretainis $ABCD$ atvaizduojamas į lygiagretainį $A'B'C'D'$.

100. Vieno trikampio dvi nelygios kraštinės ir prieš jas esančių kampų skirtumas yra lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir prieš jas esančių kampų skirtumui. Įrodykite, kad tie trikampiai yra lygūs.

Sprendimas



70 pav.

Nagrinėkime trikampius ABC ir $A'B'C'$ (70 pav.). Sakykime, $AB < AC$, $A'B' < A'C'$. Tada $\angle ACB < \angle ABC$ (remiamės tuo, kad prieš mažesnę trikampio kraštinę yra mažesnis kampas). Vadinasi, duota:

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle B - \angle C = \angle B' - \angle C'$.

Reikia įrodyti: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (kitaip: reikia įrodyti, kad yra judesys, kuriuo trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A'B'C'$).

Sakykime, AH – trikampio ABC aukštinė, atkarpa AD simetriška atkarpai AB tiesės AH atžvilgiu. Remdamiesi ašinės simetrijos (judesio) savybėmis, turime:

$AD = AB$, $BH = HD$, $\angle BDA = \angle DBA$.

Kadangi trikampio priekampis yra lygus jam negretutinių trikampio kampų sumai, tai $\angle BDA = \angle DCA + \angle DAC$; $\angle DAC = \angle BDA - \angle DCA$; $\angle DAC = \angle DBA - \angle DCA$.

Vadinasi, $\angle DAC$ yra uždavinio sąlygoje minimas trikampio kampų skirtumas.

Panašiai sudarome trikampį $D'A'C'$, kurio

$A'D' = A'B'$, $\angle D'A'C' = \angle D'B'A' - \angle D'C'A'$.

Trikampiai DAC ir $D'A'C'$ yra lygūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Vadinasi, yra judesys, kuriuo trikampis DAC atvaizduojamas į trikampį $D'A'C'$. Pažymėkime tą judesį raide j.

Rasime trikampio ABC vaizdą, gaunamą judesiu j.

Judesiu statmenosios tiesės atvaizduojamos į statmenąsias tieses. Iš to gauname, kad taškas H atvaizduojamas į tašką H'.

Taškas H yra atkarpos DB vidurio taškas, taškas H' – atkarpos $D'B'$ vidurio taškas. Judesys nekeičia tiesės taškų tvarkos ir atstumo, todėl taško B vaizdas yra taškas B'.

Gavome, kad judesiu j trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A'B'C'$, todėl jie yra lygūs: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (remiamės lygių figūrų apibrėžimu).

14. Plokščiųjų figūrų panašumas

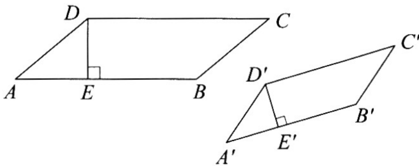
Šiame skyriuje apibrėžtos panašumo transformacijos (panašiai kaip anksčiau buvo apibrėžti judesiai). Aptartos pagrindinės panašumo transformacijų savybės. Apibrėžus panašumo transformacijas, galima apibrėžti bet kurias panašiąsias figūras.

Svarbu tai, kad įrodyta, jog panašumo transformacija kampą atvaizduoja į jam lygų kampą.

Išnagrinėta centrinė panašumo transformacija (homotetija). Paskui nesunku įrodyti ir trikampių panašumo požymius.

Uždaviniai

101. Įrodykite, kad panašiųjų lygiagretainių aukštinių, nuleistų į atitinkamas kraštines, santykis lygus tų kraštinių santykiui.



71 pav.

Sprendimas

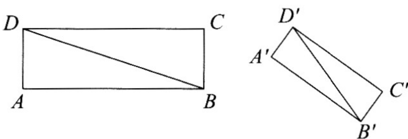
Nagrinėkime panašiuosius lygiagretainius $ABCD$ ir $A'B'C'D'$ (71 pav.). Sakykime, DE ir $D'E'$ – tų lygiagretainių aukštinės.

Kadangi lygiagretainiai panašūs, tai yra panašumo transformacija, kuria lygiagretainis $ABCD$ atvaizduojamas į lygiagretainį $A'B'C'D'$.

Panašumo transformacija nekeičia kampo didumo. Iš to gauname, kad lygiagretainio $ABCD$ aukštinė DE atvaizduojama į lygiagretainio $A'B'C'D'$ aukštinę $D'E'$.

Kadangi panašumo transformacija atstumus keičia tuo pačiu santykiu, tai $D'E' : DE = A'B' : AB$.

102. Vieno stačiakampio gretimų kraštinių santykis yra lygus kito stačiakampio gretimų kraštinių santykiui. Įrodykite, kad tie stačiakampiai yra panašūs.



72 pav.

Sprendimas

Nagrinėkime stačiakampius $ABCD$ ir $A'B'C'D'$, kurių $AB : AD = A'B' : A'D'$ (72 pav.). Iš čia randame: $A'B' : AB = A'D' : AD$.

Nubrėžkime tų stačiakampių įstrižaines BD ir $B'D'$. Gautų trikampių ABD ir $A'B'D'$ dvi vieno jų kraštinės $A'B'$ ir $A'D'$ proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms AB ir AD, kampai tarp tų kraštinių lygūs (abu kampai yra statūs). Vadinasi, tie trikampiai yra panašūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Taigi yra panašumo transformacija, kuria trikampis ABD atvaizduojamas į trikampį $A'B'D'$.

Ta panašumo transformacija tiesė BC, lygiagreti su tiese AD, atvaizduojama į tiesę,

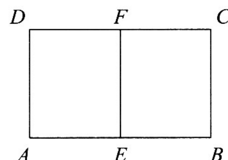
einančią per tašką B' ir lygiagrečią su tiese $A'D'$. Panašiai gautume, kad tiesė DC atvaizduojama į tiesę, einančią per tašką D' ir lygiagrečią su tiese $A'B'$. Taigi tiesių BC ir DC susikirtimo taškas C atvaizduojamas į tų tiesių vaizdų susikirtimo tašką, t. y. į tašką C'.

Gavome, kad yra panašumo transformacija, kuria stačiakampis $ABCD$ atvaizduojamas į stačiakampį $A'B'C'D'$. Vadinasi, tie stačiakampiai yra panašūs.

103. Koks turi būti stačiakampio gretimų kraštinių santykis, kad stačiakampį būtų galima padalyti į du lygius stačiakampius, panašius į pradinį?

Sprendimas

Nagrinėkime stačiakampį $ABCD$ (73 pav.). Sakykime, $AB = a$, $AD = b$.



73 *pav.*

Stačiakampį į du stačiakampius dalykime tiese, einančia per kraštinės AB vidurio tašką E ir lygiagrečia su tiese AD.

Pradinio stačiakampio gretimų kraštinių santykiu pasirinkime $a : b$.

Pradinį stačiakampį padaliję taip, kaip parodyta 73 paveiksle, gauname du lygius stačiakampius, kurių matmenys yra $\frac{a}{2}$ ir b. Su pradiniu gretimų kraštinių santykiu palyginkime du galimus santykius: 1) $\frac{a}{2} : b$ ir 2) $b : \frac{a}{2}$.

1) $\frac{a}{2} : b = a : b$; $\frac{ab}{2} = ab$; $ab = 0$.

Kadangi ab $\neq 0$, tai šitaip rezultato, kurio siekiame, negausime.

2) $b : \frac{a}{2} = a : b$, $b^2 = \frac{a^2}{2}$, $a = \sqrt{2}b$, $a : b = \sqrt{2} : 1$.

15. Tiesių ir plokštumų statmenumas

Aptariamoje knygelėje [2] tradiciškai apibrėžiamas kampas tarp tiesių.

Plačiau aptarsime simetriją plokštumos atžvilgiu.

Pasirinkus tiesę m ir tašką M, sukonstruojama tokia plokštuma, einanti per tašką M, kad tiesė m būtų statmena dviem tos plokštumos tiesėms. Iš to, plečiant plokštumos ašinę simetriją, sukonstruojamas erdvės judesys, kuris yra erdvės simetrija plokštumos atžvilgiu. Įrodomas tiesės ir plokštumos statmenumo požymis.

Įprastu būdu apibrėžiamas kampas tarp tiesės ir plokštumos.

Įrodoma trijų statmenų teorema.

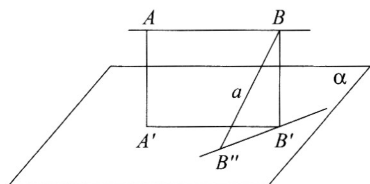
Išnagrinėjamas kampas tarp dviejų plokštumų.

Apibrėžiamos statmenosios plokštumos.

Labai svarbus šitoks teiginys: yra erdvės judesys, kuriuo plokštuma atvaizduojama į bet kurią plokštumą. Ji leidžia, pavyzdžiui, trikampių lygumo požymius taikyti ir skirtingose plokštumose esantiems trikampiams.

Uždaviniai

104. Tiesė yra lygiagreti su plokštuma α. Per jos taškus A ir B nubrėžti statmenys į plokštumą α. Jų pagrindai yra taškai A' ir B'. Įrodykite, kad $A'B' = AB$.



74 pav.

Sprendimas

Pirmiausia įrodysime, kad du statmenys į tą pačią plokštumą yra lygiagretūs. Per tašką B nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese AA' (74 pav.). Pažymėkime ją raide a. Kadangi tiesė AA' kerta plokštumą α, tai ir tiesė a kerta plokštumą α. Susikirtimo tašką pažymėkime B''.

Lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{AB}$ tiesė AA' atvaizduojama į su ja lygiagrečią tiesę a, plokštuma α – į ją pačią. Kadangi lygiagrečiuoju postūmiu (judesiu) statmenos tiesės atvaizduojamos į statmenas tieses, tai tiesė a statmena plokštumai α. Jei taškas B'' nesutaptų su tašku B' (kaip pavaizduota 74 paveiksle), tai gautume trikampį, kurio du kampai yra statieji. Taip negali būti, todėl taškas B'' sutampa su tašku B', taigi $BB' \parallel AA'$.

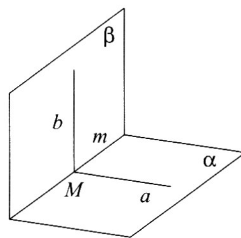
Plokštuma, einanti per lygiagrečias tieses AA' ir BB', eina per tiesę AB, lygiagrečią su plokštuma α, todėl jos ir plokštumos α susikirtimo tiesė $A'B'$ yra lygiagreti su tiese AB: $A'B' \parallel AB$.

Išeina, kad keturkampis $ABB'A'$ yra lygiagretainis. Vadinasi, $A'B' = AB$.

Papildomai išspręsime šitokį uždavinį.

Įrodykite: jei plokštuma eina per statmenį į kitą plokštumą, tai ji yra statmena ir tai plokštumai.

Sprendimas



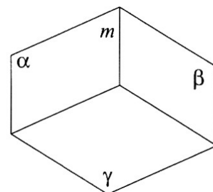
75 pav.

Sakykime, plokštuma β eina per tiesę b, statmeną plokštumai α (75 pav.). Tiesės b ir plokštumos α susikirtimo tašką pažymėkime raide M, plokštumų α ir β susikirtimo tiesę – raide m. Per tašką M plokštumoje α nubrėžkime tiesę, statmeną tiesei m. Pažymėkime ją raide a.

Kadangi $b \perp \alpha$, tai $b \perp m$ ir $b \perp a$. Vadinasi, kampas tarp plokštumų α ir β yra status. Taigi $\beta \perp \alpha$.

105. Įrodykite, kad plokštuma, statmena dviejų plokštumų susikirtimo tiesei, yra statmena kiekvienai iš tų plokštumų.

Sprendimas



76 pav.

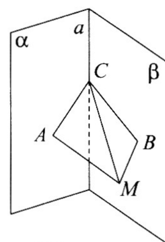
Nagrinėkime plokštumas α ir β, susikertančias tiese m, bei tiesei m statmeną plokštumą γ (76 pav.).

Kadangi $\gamma \perp m$, tai ir $m \perp \gamma$. Vadinasi, plokštuma α eina per tiesę m, statmeną plokštumai γ. Taigi plokštuma α yra statmena plokštumai γ, tas pats – plokštuma γ yra statmena plokštumai α.

Panašiai įrodytume, kad plokštuma γ yra statmena plokštumai β.

106. Plokštumos α ir β susikerta tiese a. Per joms nepriklausantį tašką M nubrėžti statmenys į tas plokštumas. Per juos einanti plokštuma tiesę a kerta taške C. Įrodykite, kad $MC \perp a$.

Sprendimas



77 pav.

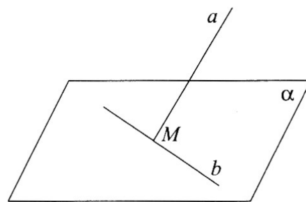
Statmenų, nubrėžtų iš taško M į plokštumas α ir β, pagrindus pažymėkime raidėmis A ir B (77 pav.).

Tiesė, statmena plokštumai, yra statmena kiekvienai tos plokštumos tiesei, todėl $MA \perp a$, $MB \perp a$.

Iš čia gauname: $a \perp MA$, $a \perp MB$. Remdamiesi tiesės ir plokštumos statmenumo požymiu, gauname, kad $a \perp AMB$. Tada $a \perp MC$, arba $MC \perp a$.

107. Nestatmena plokštumai α tiesė a kerta ją taške M. Įrodykite, kad plokštumoje α per tašką M eina vienintelė tiesė, statmena tiesei a.

Sprendimas



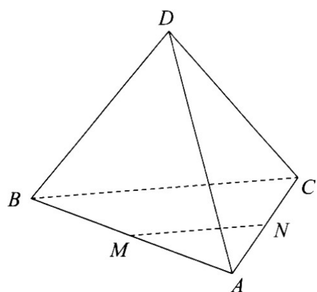
78 pav.

Visos tiesės, einančios per tašką M ir statmenos tiesei a, yra vienoje plokštumoje – plokštumoje, kuri eina per tašką M ir statmena tiesei a (78 pav.). Tos plokštumos ir plokštumos α susikirtimo tiesė b ir yra vienintelė plokštumos α tiesė, einanti per tašką M ir statmena tiesei a.

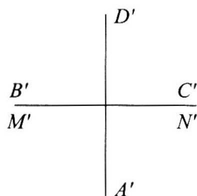
108. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunos BC ir AD viena kitai statmenos: $BC \perp AD$. Briaunų AB ir AC vidurio taškai yra M ir N. Įrodykite, kad $AD \perp MN$.

Sprendimas

Kadangi tiesės BC ir AD yra statmenos, tai per bet kurį tašką nubrėžtos su jomis



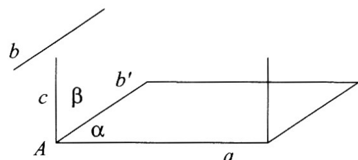
79 *pav.*



lygiagrečios tiesės $B'C'$ ir $A'D'$ (79 pav.) bus statmenos.

Atkarpa MN yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl tiesė MN yra lygiagreti su tiese BC. Vadinasi, pagalbiniame paveiksle tiesė $M'N'$ sutaps su tiese $B'C'$. Iš to ir gauname, kad $AD \perp MN$.

109. Įrodykite, kad per kiekvieną iš dviejų statmenų prasilenkiančių tiesių eina plokštuma, statmena kitai tiesei.



80 *pav.*

Sprendimas

Nagrinėkime viena kitai statmenas prasilenkiančias tieses a ir b ($a \perp b$, $a \dot{-} b$; 80 pav.).

Pasirinkime tiesės a tašką. Pažymėkime jį raide A. Per tašką A nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese b. Pažymėkime ją b'. Tiesės a ir b' nusako plokštumą. Pažymėkime ją raide α. Per tašką A eina vienintelė tiesė, statmena plokštumai α. Tą tiesę pažymėkime raide c. Taigi turime:

$c \perp \alpha$; $c \perp a$; $c \perp b'$; $c \perp b$.

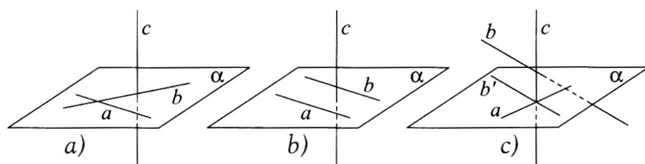
Per tieses a ir c einančią plokštumą pažymėkime raide β. Kadangi $b \perp a$ (duota sąlygoje), $b \perp c$, tai $b \perp \beta$. Tada ir $\beta \perp b$. Vadinasi, plokštuma β yra viena iš ieškomų plokštumų.

Panašiai sukonstruotume ir kitą plokštumą.

110. Dvi tiesės yra statmenos trečiai tiesei. Išvardykite tų dviejų tiesių galimas tarpusavio padėtis.

Sprendimas

Apskritai trys dviejų tiesių tarpusavio padėtys yra šios: tiesės gali būti susikertančios, lygiagrečios, prasilenkiančios. Pavyzdžiais parodysime, kad kiekvienu atveju yra joms statmena tiesė.



81 *pav.*

81 paveiksle, a: a ir b – susikertančios tiesės, α – jų nusakyta plokštuma, c – tai plokštumai statmena tiesė, todėl $c \perp a$, $c \perp b$, arba $a \perp c$, $b \perp c$.

81 paveiksle, b: a ir b – lygiagrečios tiesės, α – jų nusakyta plokštuma, c – tai plokštumai statmena tiesė, todėl $c \perp a$, $c \perp b$, arba $a \perp c$, $b \perp c$.

81 paveiksle, c: a ir b prasilenkiančios tiesės, b' – per tiesės a tašką nubrėžta su tiese b lygiagreti tiesė, α – tiesių a ir b' plokštuma; $c \perp \alpha$, $c \perp a$, $c \perp b'$, arba $a \perp c$, $b' \perp c$ (tas pats – $b \perp c$).

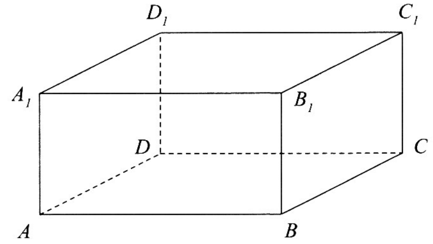
111. Briaunainis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (82 pav.) – stačiakampis gretasienis. Nurodykite šių tiesių bendrąjį statmenį: a) A_1D_1 ir BB_1; b) DC ir B_1C_1; c) CC_1 ir AB.

Sprendimas

a) Prasilenkiančių tiesių A_1D_1 ir BB_1 bendrasis statmuo yra tiesė A_1B_1. Ji kerta abi tieses ir yra kiekvienai jų statmena.

b) Prasilenkiančių tiesių DC ir B_1C_1 bendrasis statmuo yra tiesė CC_1. Ji kerta abi tieses ir yra kiekvienai jų statmena.

c) Prasilenkiančių tiesių CC_1 ir AB bendrasis statmuo yra tiesė BC. Ji kerta abi tieses ir yra kiekvienai jų statmena.



82 pav.

112. Apibrėžkite erdvės ašinę simetriją.

Sprendimas

Formaliai erdvės ašinę simetriją galima apibrėžti taip pat, kaip plokštumos ašinę simetriją. Todėl pakanka prisiminti pagrindines sąvokas.

Taškai A ir A' vadinami simetriškais tiesės atžvilgiu, kai atkarpa (tiesė) AA' yra statmena tiesei a, o atkarpos AA' vidurio taškas A_0 yra tiesės a taškas. Laikoma, kad kiekvienas tiesės a taškas yra simetriškas jam pačiam tiesės a atžvilgiu.

Erdvės simetrija tiesės (ašies) atžvilgiu (ašine simetrija) vadinama erdvės transformacija, kuria kiekvienas erdvės taškas atvaizduojamas į jam simetrišką tiesės a atžvilgiu tašką.

Figūra, sudaryta iš simetriškų tiesės (ašies) atžvilgiu taškų, vadinama simetriška tiesės (ašies) atžvilgiu figūra. Minėta tiesė vadinama figūros simetrijos ašimi.

113. Įrodykite, kad erdvėje lygiagretainis turi mažiausiai vieną simetrijos ašį. Kada lygiagretainis turi daugiau simetrijos ašių ir kiek?

Sprendimas

Žinome, kad plokštumoje kiekvienas lygiagretainis turi simetrijos centrą. Tai lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas.

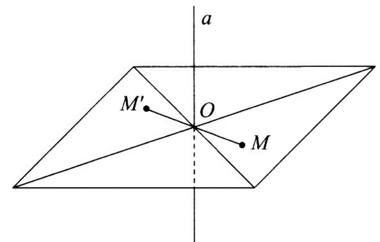
Bendruoju atveju lygiagretainis neturi simetrijos ašių.

Tą patį lygiagretainį nagrinėkime erdvėje (83 pav.).

Sakykime, tiesė a eina per lygiagretainio įstrižainių susikirtimo tašką O ir yra statmena lygiagretainio plokštumai.

Taškas O yra lygiagretainio simetrijos centras, todėl kiekvieną lygiagretainio tašką M atitinka toks lygiagretainio taškas M', kad taškas O yra atkarpos MM' vidurio taškas. Kadangi tiesė a yra statmena lygiagretainio plokštumai, tai taškas M' yra simetriškas taškui M tiesės a atžvilgiu. Išeina, kad kiekvienas lygiagretainis turi vieną simetrijos ašį.

Aišku, kad nagrinėjant erdvėje stačiakampis (ne kvadratas) ir rombas (ne kvadratas) turi tris simetrijos ašis, kvadratas – penkias simetrijos ašis.



83 pav.

16. Plokštumos vektorių skaliarinė daugyba

Pirmiausia apibrėžiami kampas tarp dviejų vektorių ir stačiakampė dekartinė koordinačių sistema. Paskui nagrinėjamos vektoriaus projekcijos ašyje ir kampo kraštinės projektavimas į kitą kampo kraštinę. Įrodžius, kad tų projekcijų ir atkarpos santykis nepriklauso nuo to, kokio ilgio ir kuri kraštinė imama, apibrėžiamas kampo (ir smailiojo, ir bukojo) kosinusas.

Įrodoma Pitagoro teorema ir jai atvirkštinė teorema. Gauta formulė vektoriaus ilgiui reikšti jo koordinatėmis, dviejų vektorių, nusakytų stačiakampėmis dekartinėmis koordinatėmis, statmenumo sąlygos. Tai panaudojama kampo tarp dviejų vektorių kosinusui išreikšti. Atitinkamoje vietoje gautas reiškinys pavadintas dviejų vektorių skaliarine sandauga. Išnagrinėtos skaliarinės daugybos savybės. Skaliarinė sandauga pritaikyta dviem teoremoms įrodyti.

Daugiau skaliarinės daugybos taikymo atvejų randama uždaviniuose.

Uždaviniai

114. Žinomos trikampio viršūnių stačiakampės dekartinės koordinatės: $A\,(5; -4)$, $B\,(3; 2)$, $C\,(2; -5)$. Patikrinkite, ar trikampis ABC yra statusis.

Sprendimas

Pritaikę formules vektoriaus koordinatėms ir vektoriaus ilgiui rasti, gauname:

$\overrightarrow{AB}\,(3-5; 2-(-4))$, $\overrightarrow{AB}\,(-2; 6)$; $\quad |\overrightarrow{AB}|^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40$;

$\overrightarrow{BC}\,(2-3; -5-2)$, $\overrightarrow{BC}\,(-1; -7)$; $\quad |\overrightarrow{BC}|^2 = (-1)^2 + (-7)^2 = 50$;

$\overrightarrow{CA}\,(5-2; -4-(-5))$, $\overrightarrow{CA}\,(3; 1)$; $\quad |\overrightarrow{CA}|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$.

Gavome, kad $BC^2 = AB^2 + CA^2$. Remdamiesi Pitagoro teoremai atvirkštine teorema, gauname, kad trikampis ABC yra statusis.

Pastaba. Kad trikampis ABC yra statusis, galėjome patikrinti ir kitaip – apskaičiavę vektorių skaliarines sandaugas. Pavyzdžiui, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 0$. To pakanka, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CA}$ (kraštinės AB ir AC) būtų statmeni (statmenos).

115. Žinomos dviejų priešingųjų rombo viršūnių stačiakampės dekartinės koordinatės: $A\,(8; -3)$ ir $C\,(10; 11)$. Rombo kraštinės ilgis lygus 10.
Raskite kitų dviejų rombo viršūnių koordinates.

Sprendimas

Sakykime, $M\,(x; y)$ – rombo viršūnė. Kadangi visos rombo kraštinės lygios, tai $MA^2 = 100$, $MC^2 = 100$. Taigi rombo viršūnių koordinatėms rasti turime šitokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases}(x-8)^2+(y-(-3))^2=100,\\(x-10)^2+(y-11)^2=100.\end{cases}$$

Spręsdami ją, gauname:

$$\begin{cases}x^2-16x+y^2+6y-27=0,\\x^2-20x+y^2-22y+121=0;\end{cases}\begin{cases}x^2-16x+y^2+6y-27=0,\\4x+28y-148=0;\end{cases}$$

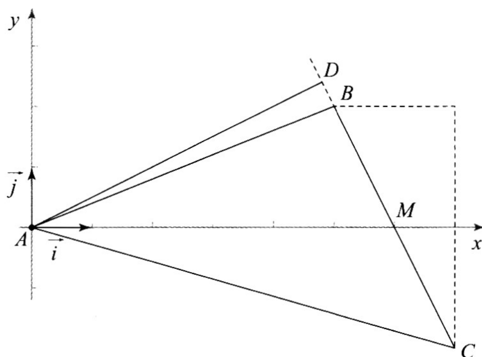
$$\begin{cases}x+7y-37=0,\\(-7y+37)^2-16(-7y+37)+y^2+6y-27=0;\end{cases}\begin{cases}x=-7y+37,\\y^2-8y+15=0.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame ieškomas kitų dviejų rombo viršūnių koordinates: (16; 3) ir (2; 5).

116. Trikampį ABC nusako vektoriai $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+2\vec{j}$ ir $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-4\vec{j}$. Apskaičiuokite jo pusiaukraštinės AM ir aukštinės AD ilgius.

Sprendimas

Kad būtų aiškiau, pasirinkime tašką A ir vienas kitam statmenus vienetinius vektorius (bazinius vektorius), pavaizduokime trikampį ABC, jo pusiaukraštinę AM ir aukštinę AD (84 pav.).



84 pav.

Ieškomi ilgiai yra vektorių $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AD}$ ilgiai ($AM=|\overrightarrow{AM}|$, $AD=|\overrightarrow{AD}|$). Todėl pirmiausia vektorius $\overrightarrow{AM}$ išreikšime baziniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ (kitaip – rasime tų vektorių stačiakampes dekartines koordinates).

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+2\vec{j}+\frac{1}{2}(2\vec{i}-4\vec{j})=6\vec{i},$$

trumpiau – $\overrightarrow{AM}(6;0)$.

Vadinasi,

$$AM=\sqrt{6^2+0^2}=6.$$

(Šiuo atveju AM galima rasti ir kitaip: $AB=|6\vec{i}|=|6|\cdot|\vec{i}|=6\cdot1=6$.)

Toliau sprendžiame taip.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+2\vec{j}+k(2\vec{i}-4\vec{j})=(5+2k)\vec{i}+(2-4k)\vec{j},$$

$$\overrightarrow{AD}(5+2k;\ 2-4k).$$

Skaičių k rasime iš sąlygos $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, kurią patogu pakeisti sąlyga $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Gaunama:

$(5 + 2k) \cdot 2 + (2 - 4k) \cdot (-4) = 0, \qquad 2 + 20k = 0, \qquad k = -0{,}1.$

$\overrightarrow{AD}\,((5 + 2 \cdot (-0{,}1); 2 - 4 \cdot (-0{,}1)),\ \overrightarrow{AD}\,(4{,}8; 2{,}4);$

$AD = 2{,}4\sqrt{2^2 + 1^2} = 2{,}4\sqrt{5}.$

117. Vektoriai $\vec{c} = k\vec{a} + 17\vec{b}$ ir $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$ vienas kitam statmeni;

$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ (\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120°$. Raskite k.

Sprendimas

Kadangi vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ vienas kitam statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui: $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$. Čia skaliarinei sandaugai apskaičiuoti netinka jos išraiška stačiakampėmis dekartinėmis koordinatėmis (atitinkamų koordinačių sandaugų suma), nes tokių koordinačių neturime. Todėl teks prisiminti kitas vektorių skaliarinės daugybos savybes. Taip gauname:

$(k\vec{a} + 17\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 0;$

$3k\vec{a}^{\,2} + 51\vec{b} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} - 17\vec{b}^{\,2} = 0;$

$3k|\vec{a}|^2 + 51|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b}; \vec{a}}) - k|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) - 17|\vec{b}|^2 = 0;$

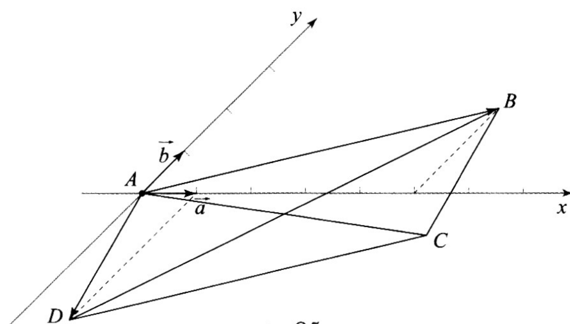
$3k \cdot 2^2 + 51 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) - k \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-0{,}5) - 17 \cdot 5^2 = 0;$

$12k - 255 + 5k - 425 = 0;\ 17k = 680;\ k = 40.$

118. Lygiagretainį $ABCD$ nusako vektoriai $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b};\ |\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 45°$. Pavaizduokite lygiagretainį. Apskaičiuokite lygiagretainio įstrižainių ilgius ir kampą tarp įstrižainių.

Sprendimas

Lygiagretainį (85 pav.) pavaizduojame panašiai kaip 116 uždavinyje. Skiriasi tik baziniai vektoriai.



85 pav.

Lygiagretainio įstrižainių vektoriai yra:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (5\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{a} - 3\vec{b}) = 6\vec{a} - \vec{b};$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -(5\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{a} - 3\vec{b}) = -4\vec{a} - 5\vec{b}.$

Rasime lygiagretainio įstrižainių ilgius.

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

$\overrightarrow{AC}^2 = (6\vec{a} - \vec{b})^2 = 36\vec{a}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 36|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$

$= 36\cdot(2\sqrt{2})^2 - 12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3^2 = 225,\ AC = 15.$

Panašiai randame:

$\overrightarrow{BD}^2 = (-4\vec{a} - 5\vec{b})^2 = 16\vec{a}^2 + 40\vec{a}\cdot\vec{b} + 25\vec{b}^2 = 16|\vec{a}|^2 + 40|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) + 25|\vec{b}|^2 =$

$= 16\cdot(2\sqrt{2})^2 + 40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 25\cdot 3^2 = 593,\ BD = \sqrt{593}.$

Rasime kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ kosinusą.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}.$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (6\vec{a} - \vec{b})(-4\vec{a} - 5\vec{b}) = -24\vec{a}^2 + 4\vec{b}\cdot\vec{a} - 30\vec{a}\cdot\vec{b} + 5\vec{b}^2 =$

$= -24(2\sqrt{2})^2 - 26\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot 3^2 = -303;$

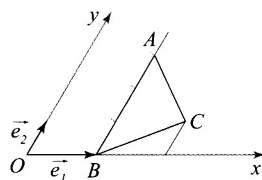
$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}) = \frac{-303}{15\cdot\sqrt{593}} = -\frac{101}{5\sqrt{593}}.$

Kadangi $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}) < 0$, tai kampas tarp vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ yra bukasis kampas. Kampu tarp dviejų tiesių laikomas smailusis arba statusis kampas, gautas susikirtus toms tiesėms, todėl kampo tarp lygiagretainio įstrižainių kosinusas lygus $\frac{101}{5\sqrt{593}}$, o ieškomas kampas lygus $\arccos\frac{101}{5\sqrt{593}}$.

119. Bazinių vektorių ilgiai yra $|\vec{e_1}| = 4$ ir $|\vec{e_2}| = 2$, o kampas tarp jų $(\widehat{\vec{e_1};\vec{e_2}}) = 60°$. Trikampio viršūnių koordinatės yra: A (1; 3), B (1; 0), C (2; 1). Pavaizduokite trikampį. Apskaičiuokite kraštinių AB bei BC ilgius ir trikampio kampą A.

Sprendimas

Trikampį (86 pav.) vaizduojame taip, kaip ankstesniuose uždaviniuose. Panašiai ir sprendžiame.



86 *pav.*

$\overrightarrow{AB}(1-1; 0-3)$, $\overrightarrow{AB}(0; -3)$; $\overrightarrow{AB} = -3\vec{e_2}$;

$AB = |-3\vec{e_2}| = |-3|\cdot|\vec{e_2}| = 3\cdot 2 = 6.$

$\overrightarrow{BC}(2-1;1-0)$, $\overrightarrow{BC}(1;1)$, $\overrightarrow{BC}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$;

$$\overrightarrow{BC}^2=(\vec{e_1}+\vec{e_2})^2=\vec{e_1}^2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_2}^2=|\vec{e_1}|^2+2|\vec{e_1}||\vec{e_2}|\cos(\widehat{\vec{e_1};\vec{e_2}})+|\vec{e_2}|^2=$$

$$=4^2+2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2^2=28;\ BC=\sqrt{28}.$$

Trikampio kampas A yra kampas tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$, todėl ir taikysime formulę

$$\cos A=\cos(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.$$

Kadangi

$\overrightarrow{AC}(2-1;1-3)$, $\overrightarrow{AC}(1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}$,

tai

$$\overrightarrow{AC}^2=(\vec{e_1}-2\vec{e_2})^2=\vec{e_1}^2-4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+4\vec{e_2}^2=|\vec{e_1}|^2-4|\vec{e_1}|\cdot|\vec{e_2}|\cos(\widehat{\vec{e_1};\vec{e_2}})+4|\vec{e_2}|^2=$$

$$=4^2-4\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot2^2=16;\ AC=4.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\vec{e_2}\cdot(\vec{e_1}-2\vec{e_2})=-3\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+6\vec{e_2}^2=-3|\vec{e_2}||\vec{e_1}|\cos(\widehat{\vec{e_1};\vec{e_2}})+6|\vec{e_2}|^2=$$

$$=-3\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot2^2=12;$$

$$\cos A=\frac{12}{6\cdot4}=\frac{1}{2},\ \angle A=60^0.$$

120. Trikampio viršūnių koordinatės yra A (1; 1), B (5; 3), C (3; 5), o jo kraštinių ilgiai $AB=\sqrt{52}$, $AC=4$, $BC=\sqrt{28}$. Apskaičiuokite bazinių vektorių ilgius ir kampą tarp bazinių vektorių.

Sprendimas

Bazinius vektorius pažymėkime $\vec{e_1}$ ir $\vec{e_2}$. Rasime trikampio kraštinių vektorius:

$\overrightarrow{AB}(5-1;3-1)$, $\overrightarrow{AB}(4;2)$, $\overrightarrow{AB}=4\vec{e_1}+2\vec{e_2}$,

$\overrightarrow{BC}(3-5;5-3)$, $\overrightarrow{BC}(-2;2)$, $\overrightarrow{BC}=-2\vec{e_1}+2\vec{e_2}$,

$\overrightarrow{CA}(1-3;1-5)$, $\overrightarrow{CA}(-2;-4)$, $\overrightarrow{CA}=-2\vec{e_1}-4\vec{e_2}$.

Kadangi $AB=\sqrt{52}$, tai $AB^2=52$, $\overrightarrow{AB}^2=52$.

Tačiau

$$\overrightarrow{AB}^2=(4\vec{e_1}+2\vec{e_2})^2=16\vec{e_1}^2+16\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}+4\vec{e_2}^2.$$

Vadinasi,

$$16\vec{e}_1^{\,2}+16\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+4\vec{e}_2^{\,2}=52.$$

Panašiai gautume:

$$4\vec{e}_1^{\,2}-8\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+4\vec{e}_2^{\,2}=28;$$

$$4\vec{e}_1^{\,2}+16\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+16\vec{e}_2^{\,2}=16.$$

Pažymėję (kad būtų trumpiau)

$\vec{e}_1^{\,2}=a,\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=b,\ \vec{e}_2^{\,2}=c,$

gauname šitokią a, b, c siejančią lygčių sistemą:

$$\begin{cases}4a+4b+c=13,\\ a-2b+c=7,\\ a+4b+4c=4.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame: $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$. Vadinasi,

$|\vec{e}_1|^2=4,\ |\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cos(\widehat{\vec{e}_1;\vec{e}_2})=-1,\ |\vec{e}_2|^2=1.$

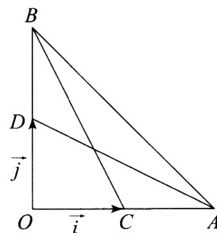
Iš čia randame ieškomus bazinių vektorių ilgis ir kampą tarp bazinių vektorių:

$|\vec{e}_1|=2,\ |\vec{e}_2|=1,\ (\widehat{\vec{e}_1;\vec{e}_2})=120°.$

121. Apskaičiuokite kampą tarp stačiojo lygiašonio trikampio pusiaukraštinių, einančių iš smailiųjų kampų viršūnių.

Sprendimas

Nagrinėkime statųjį lygiašonį trikampį AOB: $OA \perp OB$, $OA = OB$ (87 pav.).



87 pav.

Trikampio kraštinių OA ir OB vidurio taškus pažymėkime raidėmis C ir D. Pasirinkime stačiakampę dekartinę koordinačių sistemą: O – koordinačių pradžia, $\overrightarrow{OC}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{j}$ – baziniai vektoriai. Tada trikampio pusiaukraštinių, išeinančių iš smailiųjų kampų viršūnių, vektoriai yra:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=-2\vec{i}+\vec{j},\ \overrightarrow{AD}(-2;1),$$

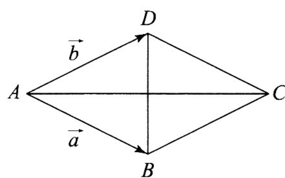
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-2\vec{j}+\vec{i},\ \overrightarrow{BC}(1;-2).$$

Kampo tarp tų vektorių kosinusas

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}})=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-2\cdot1+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}}=-\frac{4}{5}.$$

Kadangi kampu tarp dviejų tiesių laikomas smailusis arba statusis kampas, gautas susikirtus toms tiesėms, tai ieškomasis kampas yra $\arccos\frac{4}{5}$.

122. Įrodykite, kad rombo įstrižainės yra statmenos.



88 *pav.*

Sprendimas

Nagrinėkime rombą $ABCD$ (88 pav.). Sakykime, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Tada $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Rasime rombo įstrižainių vektorius:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+\vec{b}.$$

Tų vektorių skaliarinė sandauga

$$(\vec{a}+\vec{b})(-\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}=-|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=0.$$

Kadangi rombo įstrižainių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, tai vektoriai yra statmeni. Taigi rombo įstrižainės yra statmenos.

123. Įrodykite, kad rombo įstrižainės rombo kampus dalija pusiau.

Sprendimas

Palyginsime kampų BAC ir DAC (88 pav.) kosinusus, t. y. kampų tarp vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ bei $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$ kosinusus.

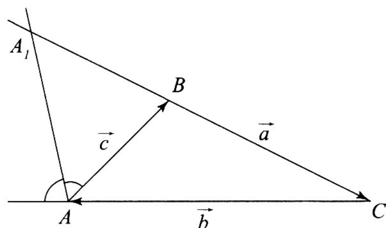
Kadangi $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ ir $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, tai

$$\cos(\widehat{\vec{a}+\vec{b};\vec{a}})=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}|}=\frac{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}|};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}+\vec{b};\vec{b}})=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{b}|}.$$

Iš čia gauname: $\cos(\widehat{\vec{a}+\vec{b};\vec{a}})=\cos(\widehat{\vec{a}+\vec{b};\vec{b}})$. Tai ir reiškia, kad rombo įstrižainė rombo kampus dalija pusiau.

124. Trikampio priekampio pusiaukampinė kerta tiesę, kurioje yra prieš jo viršūnę esanti kraštinė. Raskite santykį, kuriuo minėta pusiaukampinė dalija tą kraštinę.



89 *pav.*

Sprendimas

Nagrinėkime trikampį ABC (89 pav.). Jo kraštinių vektorius pažymėkime šitaip:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{c},\ \overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{CA}=\vec{b}.$$

Kadangi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, tai

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

Trikampio kraštinių ilgius pažymėkime šitaip: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Sakykime, kampo A priekampio pusiaukampinė tiesę BC kerta taške A_1. Rasime santykį,

kuriuo taškas A_1 dalija atkarpą BC.

(Priminsime: jei $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}$, tai k yra ieškomas santykis.)

Iš taško A atidėję du vienodo ilgio vektorius, pavyzdžiui, vienetinius vektorius $\frac{\vec{b}}{b}$ ir $\frac{\vec{c}}{c}$, juos sudėję, gausime kampo A priekampio pusiaukampinės vektorių (prisiminkime dviejų nekolinearių vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę ir rombo įstrižainių savybę rombo kampus dalyti pusiau). Todėl

$$\overrightarrow{AA_1} = k\left(\frac{\vec{b}}{b} + \frac{\vec{c}}{c}\right) (k \text{ – tam tikras skaičius}).$$

Kadangi $\overrightarrow{A_1C} = m\vec{a}$, tai iš lygybės

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = 0,$$

ją pertvarkę, gauname lygybę

$$m\vec{a} + \left(\frac{k}{b} + 1\right)\vec{b} + \frac{k}{c}\vec{c} = 0,$$

siejančią vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Nuo jau turėtos lygybės $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ji gali skirtis tik tuo, kad jos abi pusės gali būti padaugintos iš kurio nors skaičiaus. Priešingu atveju du iš vektorių būtų galima išreikšti trečiu vektoriumi. Tada visi trys vektoriai būtų kolinearūs, o taip nėra. Taigi turi būti

$$m = \frac{k}{b} + 1 = \frac{k}{c}.$$

Iš šių lygčių randame:

$$k = \frac{bc}{b-c}, \; m = \frac{b}{b-c}.$$

(Čia išskirtas lygiašonis trikampis ($b = c$). Lygiašonio trikampio kampo prie viršūnės priekampio pusiaukampinė yra lygiagreti su pagrindu.) Vadinasi,

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{b}{b-c}\vec{a}; \; \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A_1C}, \; \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1C} - \overrightarrow{BC} = \frac{b}{b-c}\vec{a} - \vec{a} = \frac{c}{b-c}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BA_1} = -\frac{c}{b-c}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BA_1} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{A_1C}.$$

Taigi ieškomas santykis yra lygus $-\frac{c}{b}$.

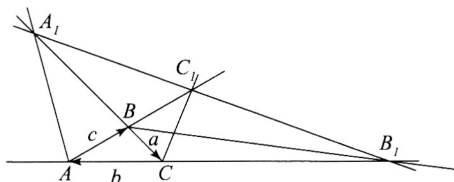
Pateikiame gauto rezultato žodinę formuluotę:

jei trikampio priekampio pusiaukampinė kerta per kitas dvi viršūnes einančią tiesę, tai atstumai nuo susikirtimo taško iki tų dviejų viršūnių yra atvirkščiai proporcingi prieš jas esančioms trikampio kraštinėms.

Pavyzdžiui, 89 paveiksle: $A_1B = pc$, $A_1C = pb$, arba $A_1B : A_1C = c : b$.

Jam priešingas skaičius $-\dfrac{c}{b}$ yra santykis, kuruo taškas A_1 dalija atkarpą BC.

125. Įrodykite, kad nelygiašonio trikampio priekampių pusiaukampinių ir tiesių, kuriose yra prieš priekampių viršūnes esančios kraštinės, susikirtimo taškai yra vienoje tiesėje.



90 pav.

Sprendimas

Nagrinėkime trikampį, kurio kraštinės yra: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ (90 pav.). Priekampių A, B, C pusiaukampinių ir prieš juos esančių tiesių BC, AC, AB susikirtimo taškus pažymėkime A_1, B_1, C_1.

Pagal 124 uždavino rezultatą taškai A_1, B_1, C_1 atkarpas BC, CA, AB dalija santykiais

$$k = -\frac{c}{b},\ m = -\frac{a}{c},\ n = -\frac{b}{a}.$$

Šių santykių sandauga $kmn = -1$. Pagal Menelajo teoremai atvirkštinę teoremą (žr. 65 uždavinį), taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje.

17. Erdvės vektorių skaliarinė daugyba

Aptariamoje knygelėje [2] apibrėžiama erdvės stačiakampė dekartinė koordinačių sistema, gauta vektoriaus ilgio formulė, dviejų vektorių statmenumo sąlygos, kampo tarp dviejų vektorių kosinuso formulė, dviejų vektorių skaliarinės sandaugos formulė ir skaliarinės daugybos savybės.

Apskritai, tik su kitu koordinačių skaičiumi, pakartojama tai, kas buvo daroma nagrinėjant plokštumos vektorių skaliarinę daugybą.

Uždaviniai

Pateiktuose uždaviniuose nurodytos taškų ir vektorių stačiakampės dekartinės koordinatės.

126. Vektorius $\vec{b}$ yra vienakryptis su vektoriumi $\vec{a}(6; -8; -7{,}5)$, $|\vec{b}| = 50$.

Raskite vektoriaus $\vec{b}$ koordinates.

Sprendimas

Kadangi vektorius $\vec{b}$ vienakryptis su vektoriumi $\vec{a}$, tai

$\vec{b} = k\vec{a}$, $k > 0$, $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$, $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$.

Tačiau

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-7{,}5)^2} = 12{,}5$.

Vadinasi,

$50 = k \cdot 12{,}5$, $k = 4$, $\vec{b} = 4\vec{a} = 4 \cdot (6; -8; -7{,}5)$;

$\vec{b}(6 \cdot 4; (-8) \cdot 4; (-7{,}5) \cdot 4)$, $\vec{b}(24; -32; -30)$.

127. Vektoriai $\vec{a}(-3; 0; 4)$ ir $\vec{b}(5; -2; -14)$ atidėti iš vieno taško. Iš to taško atidėtas vienetinis vektorius vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudarytą kampą dalija pusiau. Raskite to vektoriaus koordinates.

Sprendimas

Žinome, kad dviejų nekolinearių vektorių, atidėtų iš vieno taško, suma yra iš to taško išeinanti lygiagretainio įstrižainė. Jei tų dviejų vektorių ilgiai būtų lygūs, tai jų suma būtų rombo įstrižainė ir jo kampą dalytų pusiau. Taip gaunamas uždavinio sprendimo planas.

Randame su vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčius vienetinius vektorius $\vec{a_1} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ir $\vec{b_1} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b_1}|}$.

Ieškomas vektorius yra vienakryptis su vektoriumi $\vec{a_1}+\vec{b_1}$.

Kadangi

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5;\ |\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-2)^2+(-14)^2}=15,$$

tai

$$\vec{a_1}\left(-\frac{3}{5};0;\frac{4}{5}\right),\ \vec{b_1}\left(\frac{5}{15};-\frac{2}{15};-\frac{14}{15}\right),$$

$$\left(\vec{a_1}+\vec{b_1}\right)\left(-\frac{3}{5}+\frac{5}{15};0+\left(-\frac{2}{15}\right);\frac{4}{5}+\left(-\frac{14}{15}\right)\right),\ \left(\vec{a_1}+\vec{b_1}\right)\left(-\frac{4}{15};-\frac{2}{15};-\frac{2}{15}\right),$$

$$|\vec{a_1}+\vec{b_1}|=\frac{2}{15}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{2}{15}\sqrt{6}.$$

Vadinasi, ieškomas vektorius yra

$$\vec{c}=\frac{\vec{a_1}+\vec{b_1}}{|\vec{a_1}+\vec{b_1}|},\ \vec{c}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

128. Vektoriai $\vec{a}\,(2;-3;6)$ ir $\vec{b}\,(-1;2;-2)$ atidėti iš vieno taško. Iš to taško atidėtas vektorius $\vec{c}$ vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudarytą kampą dalija pusiau, jo ilgis lygus $3\sqrt{42}$. Raskite vektoriaus $\vec{c}$ koordinates.

Sprendimas

Sprendžiame taip pat kaip 127 uždavinį.

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7;\ \vec{a_1}\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right);$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3;\ \vec{b_1}\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right);$$

$$\vec{c_1}=\vec{a_1}+\vec{b_1};\ \vec{c_1}\left(\frac{2}{7}+\left(-\frac{1}{3}\right);-\frac{3}{7}+\frac{2}{3};\frac{6}{7}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right),\ \vec{c_1}\left(-\frac{1}{21};\frac{5}{21};\frac{4}{21}\right),\ \vec{c_1}=\frac{1}{21}\vec{c_2};$$

$\vec{c_1}\uparrow\uparrow\vec{c_2},\ \vec{c_2}(-1;5;4).$

Dabar galime rašyti:

$$\vec{c}=k\vec{c_2},\ k>0;\ |\vec{c_2}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+4^2}=\sqrt{42};$$

$$|\vec{c}|=|k||\vec{c_2}|,\ 3\sqrt{42}=k\sqrt{42},\ k=3;\ \vec{c}((-1)\cdot 3;5\cdot 3;4\cdot 3),$$

t. y. $\vec{c}\,(-3;15;12)$.

129. Žinomos keturių taškų koordinatės: A (1; –2; 2), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1), D (–5; –5; 3). Įrodykite, kad tiesės AC ir BD yra statmenos.

Sprendimas

Tiesių statmenumui įrodyti pakanka įrodyti, kad vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ yra vienas kitam statmeni, t. y. kad jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Randame vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ koordinates ir apskaičiuojame tų vektorių skaliarinę sandaugą:

$\overrightarrow{AC}(-4-1;\ 1-(-2);\ 1-2)$, $\overrightarrow{AC}(-5;\ 3;\ -1)$,

$\overrightarrow{BD}(-5-1;\ -5-4;\ 3-0)$, $\overrightarrow{BD}(-6;\ -9;\ 3)$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -5\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3 = 0.$

Kadangi $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, tai $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$, $AC\perp BD$.

130. Vektorius $\vec{c}$, statmenas vektoriams $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ ir $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, su ašimi Oy sudaro bukąjį kampą. Jo ilgis $|\vec{c}|=14.$ Raskite vektoriaus $\vec{c}$ koordinates.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$ Tada:

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ 3x+2y+2z=0,$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ 18x-22y-5z=0,$

$\vec{j}\cdot\vec{c}<0,\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z<0.$

$|\vec{c}|=14,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=14.$

Iš pirmų dviejų lygčių randame, kad $x=\frac{2}{3}y, z=-2y$. Įrašę į paskutinę lygtį, gauname:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}y\right)^2+y^2+(-2y)^2}=14,\quad \frac{7}{3}|y|=14,\quad |y|=6.$$

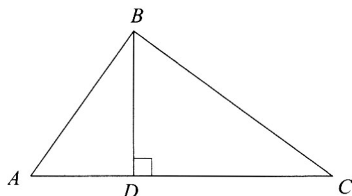
Kadangi y < 0, tai $y=-6$.

Vadinasi, $\vec{c}=-4\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k}.$

131. Žinomos trikampio viršūnių koordinatės: A (1; –1; 2), B (5; –6; 2), C (1; 3; –1). Raskite trikampio aukštinės, nuleistos iš viršūnės B, ilgį.

Sprendimas

Kad būtų vaizdžiau, pakaks scheminio piešinio (91 pav.).



91 pav.

Sakykime, atkarpa BD yra trikampio ABC aukštinė. Tada

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, $(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Kadangi

$$\overrightarrow{AB}(5-1; -6-(-1); 2-2),\ \overrightarrow{AB}(4; -5; 0);\ \overrightarrow{AC}(1-1; 3-(-1); -1-2),\ \overrightarrow{AC}(0; 4; -3),$$

$$(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(0 \cdot k - 4; 4 \cdot k - (-5); -3 \cdot k - 0),\ (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(-4; 4k+5; -3k),$$

tai, skaliarinę sandaugą $(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}$ išreiškę koordinatėmis, gauname:

$$-4 \cdot 0 + (4k+5) \cdot 4 + (-3k) \cdot (-3) = 0;\ 25k + 20 = 0;\ k = -\frac{4}{5};$$

$$\overrightarrow{BD}\left(-4; \frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right) = \frac{1}{5}\vec{a},\ \vec{a}(-20; 9; 12).$$

Vadinasi, ieškomas aukštinės ilgis

$$|\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{5}\sqrt{(-20)^2 + 9^2 + 12^2} = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5.$$

Pastaba. Kadangi $k < 0$, tai taškas A turėtų būti tarp taškų C ir D. Aišku, sprendimui tas įtakos neturėjo.

132. Vektoriaus $\vec{c}$ ilgis lygus 1. Tas vektorius statmenas vektoriui $\vec{a}\,(1; 1; 1)$, o su vektoriumi $\vec{b}\,(1; 0; 0)$ sudaro 60° kampą. Raskite vektoriaus $\vec{c}$ koordinates.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{c}\,(x; y; z)$. Tada

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (pagal vektoriaus ilgio formulę);

$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0$ (pagal dviejų vektorių statmenumo sąlygą);

$\dfrac{1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z}{1 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$ (pagal kampo tarp dviejų vektorių kosinuso formulę).

Iš šių lygčių gauname:

$$x = \frac{1}{2},\ y = -z - \frac{1}{2};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-z - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1,$$

$$4z^2 + 2z - 1 = 0;\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Vadinasi, uždavinio sąlygas tenkina du vektoriai:

$$\vec{c_1}\left(\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) \text{ ir } \vec{c_2}\left(\frac{1}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right).$$

133. Žinomos trikampio viršūnių koordinatės: A (1; 2; 0), B (3; 0; –3); C (5; 2; 6). Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

Sprendimas

Trikampio ABC plotui S_{ABC} apskaičiuoti galima pasirinkti įprastą formulę

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_c.$$

Tektų apskaičiuoti kraštinės AB ilgį ir aukštinės, nuleistos iš viršūnės C, ilgį h_c (žr. 131 uždavinį). Čia trikampio ABC plotui apskaičiuoti pasirinksime kitą formulę –

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Turime:

$$\overrightarrow{AB}(3-1; 0-2; -3-0),\ \overrightarrow{AB}(2; -2; -3),\ AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17};$$

$$\overrightarrow{AC}(5-1; 2-2; 6-0),\ \overrightarrow{AC}(4; 0; 6),\ AC = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{52};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 6 = -10;\ \cos A = \frac{-10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{52}};\ \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{28^2}{17 \cdot 52};$$

$$\sin A = \frac{28}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{52}};\ S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{28}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{52}} = 14.$$

134. Duotos trijų vektorių koordinatės: $\vec{a}$ (8; 4; 1), $\vec{b}$ (2; 2; 1), $\vec{c}$ (1; 1; 1).

Vienetinis vektorius $\vec{d}$ su vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro lygius kampus ir yra statmenas vektoriui $\vec{c}$. Raskite vektoriaus $\vec{d}$ koordinates.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{d}$ (x; y; z). Tada

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (pagal vektoriaus ilgio formulę); (1)

$$\frac{8 \cdot x + 4 \cdot y + 1 \cdot z}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot 1},$$

arba $x - y - z = 0$ (2)

(lygių kampų kosinusai lygūs; jie apskaičiuoti taikant kampo tarp dviejų vektorių kosinuso formulę);

$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0$ (3)

(pritaikyta dviejų vektorių statmenumo sąlyga).

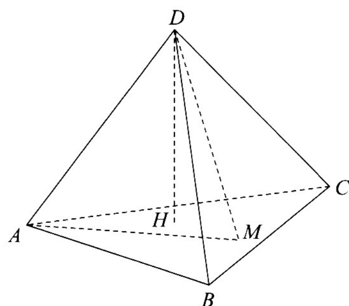
Iš (2) ir (3) lygčių gauname, kad

$x = 0, z = -y$.

Įrašę į (1) lygtį, iš gautos lygties randame, kad $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Taigi uždavinio sąlygą tenkina du vektoriai: $\left(0; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

135. Žinomos trikampės piramidės viršūnių koordinatės: A (2; 3; 1), B (4; 1; –2), C (6; 3; 7), D (–5; –4; 8). Apskaičiuokite piramidės aukštinės, nuleistos iš viršūnės D, ilgį.



92 pav.

Sprendimas

Kad būtų lengviau orientuotis, pasinaudokime scheminiu piešiniu (92 pav.).

Sakykime, M – bet kuris plokštumos ABC taškas. Tada vektorius $\overrightarrow{AM}$ yra komplanarus su vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.

Vektoriai

$\overrightarrow{AB}(4-2; 1-3; -2-1)$, $\overrightarrow{AB}(2; -2; -3)$,

$\overrightarrow{AC}(6-2; 3-3; 7-1)$, $\overrightarrow{AC}(4; 0; 6)$

yra nekolinearūs (nes jų atitinkamos koordinatės nėra proporcingos). Vadinasi, galime teigti, kad

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ (remiamės trijų vektorių komplanarumo būtinąja sąlyga).

Taigi, vektorius $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$, kai $DM \perp AB$ ir $DM \perp AC$, bus piramidės aukštinės, nuleistos iš viršūnės D, vektorius (prisiminkime tiesės ir plokštumos statmenumo požymį). Statmens pagrindą pažymėję raide H, gausime sąlygas, kurias turi tenkinti aukštinės vektorius $\overrightarrow{DH}$:

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + n\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Išreiškę koordinatėmis, gausime:

$\overrightarrow{DA}(2-(-5); 3-(-4); 1-8)$, $\overrightarrow{DA}(7; 7; -7)$,

$\overrightarrow{DH}(7+2n+4p; 7-2n; -7-3n+6p)$,

$(7+2n+4p)\cdot 2 + (7-2n)\cdot(-2) + (-7-3n+6p)\cdot(-3) = 0$,

$(7+2n+4p)\cdot 4 + (7-2n)\cdot 0 + (-7-3n+6p)\cdot 6 = 0$,

arba

$21 + 17n - 10p = 0$,

$-14 - 10n + 52p = 0$.

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame, kad $n = -\frac{17}{14}$, $p = \frac{1}{28}$. Tada

$\overrightarrow{DH}\left(\frac{33}{7}; \frac{66}{7}; -\frac{22}{7}\right)$, $\overrightarrow{DH}\left(\frac{11}{7}\cdot 3, \frac{11}{7}\cdot 6; \frac{11}{7}\cdot(-2)\right)$,

$|\overrightarrow{DH}| = \frac{11}{7}\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 11$.

136. Žinomos trikampės piramidės viršūnių koordinatės: $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

Sprendimas

Piramidės tūriui V apskaičiuoti pasirinkime įprastą formulę

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_D.$$

Kaip galima apskaičiuoti trikampio plotą, jau nagrinėjome 133 uždavinyje, piramidės aukštinę – 135 uždavinyje, todėl čia išsamesnių paaiškinimų ir nepateiksime.

$$\overrightarrow{AB}(5-2; 5-(-1); 4-1),\ \overrightarrow{AB}(3; 6; 3),$$

$$\overrightarrow{AC}(3-2; 2-(-1); -1-1),\ \overrightarrow{AC}(1; 3; -2);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{1^2+2^2+1^2} = 3\sqrt{6};\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 15;$$

$$\cos A = \frac{15}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}},\ \sin^2 A = 1 - \left(\frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}\right)^2 = \frac{59}{6 \cdot 14},\ \sin A = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{59}}{2}.$$

Sakykime, H – piramidės aukštinės, nuleistos iš viršūnės D, pagrindas. Tada

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Išreiškę koordinatėmis, gauname:

$$\overrightarrow{DA}(2-4; -1-1; 1-3),\ \overrightarrow{DA}(-2; -2; -2);$$

$$\overrightarrow{DH}(-2+3k+m; -2+6k+3m; -2+3k-2m);$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} = 0, \qquad 3 \cdot (-2+3k+m) + 6 \cdot (-2+6k+3m) + 3 \cdot (-2+3k-2m) = 0,$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DH} = 0, \qquad 1 \cdot (-2+3k+m) + 3 \cdot (-2+6k+3m) + (-2) \cdot (-2+3k-2m) = 0,$$

arba

$-24 + 54k + 15m = 0,$

$-4 + 15k + 14m = 0.$

Iš šių dviejų lygčių randame: $k = \frac{92}{177},\ m = -\frac{48}{177}.$

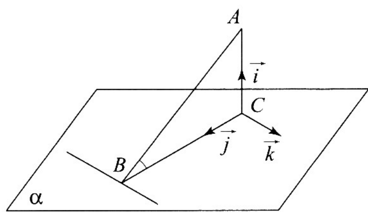
Tada

$$\overrightarrow{DH}\left(\frac{6}{59} \cdot (-7); \frac{6}{59} \cdot 3; \frac{6}{59} \cdot 1\right),\ h_D = |\overrightarrow{DH}| = \frac{6}{59} \cdot \sqrt{(-7)^2+3^2+1^2} = \frac{6}{59} \cdot \sqrt{59};$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{59}}{2} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{59}}{59} = 3.$$

Taikydami vektorius, išspręskite tolesnius uždavinius.

137. Įrodykite, kad kampas, kurį sudaro pasviroji ir jos projekcija plokštumoje, yra mažiausias iš kampų, kuriuos pasviroji sudaro su tos plokštumos tiesėmis.



93 *pav.*

Sprendimas

Nagrinėkime plokštumą α ir pasvirąją jai, nubrėžtą iš taško A (93 pav.). Tos pasvirosios ir statmens plokštumai α, nuleisto iš taško A, pagrindus pažymėkime raidėmis B ir C.

Pasirinkime stačiakampę dekartinę koordinačių sistemą: taškas C – koordinačių pradžia;

$\vec{i}$ – statmens CA vienetinis vektorius;

$\vec{j}$ – pasvirosios AB projekcijos CB vienetinis vektorius;

$\vec{k}$ – pasvirosios projekcijai CB statmenas vienetinis vektorius.

Tada

pasvirosios AB vektorius yra $\vec{m} = a\vec{i} + b\vec{j}$;

plokštumos α tiesės vektorius $\vec{m} = c\vec{j} + d\vec{k}$ (kai $d = 0$ – pasvirosios projekcijos vektorius).

Išnagrinėsime kampus tarp pasvirosios AB ir plokštumos α tiesių. Juos pažymėkime raide φ. Kadangi kampas tarp dviejų tiesių yra smailusis arba statusis, tai

$$\cos\varphi = |\cos(\widehat{\vec{m};\vec{n}})| = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{|a\cdot 0 + b\cdot c + 0\cdot d|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Rasime, kada kampas φ yra mažiausias, kitaip – kada $\cos\varphi$ yra didžiausias. Aišku, kad $c \neq 0$, nes kai $c = 0$, $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90°$). Vadinasi, $\cos\varphi$ išraišką galima supaprastinti. Skaitiklį ir vardiklį padalykime iš $|c|$. Gausime, kad

$$\cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1+p^2}};\ \text{čia}\ p = \frac{d}{c}.$$

Kadangi čia gali keistis tik p, tai $\cos\varphi$ reikšmė bus didžiausia, kai $d = 0$. Iš čia ir gauname, kad kampas tarp pasvirosios plokštumai ir jos statmenosios projekcijos toje plokštumoje yra mažiausias iš kampų tarp visų pasvirosios ir plokštumos tiesių. 93 paveiksle tas kampas pažymėtas lankeliu.

138. Raskite kampus tarp kubo įstrižainės ir jo sienų įstrižainių.

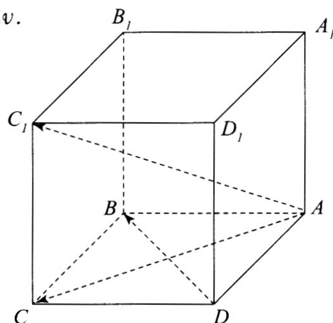
Sprendimas

Rasime kampus α ir β tarp kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (94 pav.) įstrižainės AC_1 bei jo sienos $ABCD$ įstrižainių AC ir DB.

Sakykime, briaunos ilgis lygus a. Pasirinkime su vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ vienakrypčius

vienetinius vektorius. Tada

$$\overrightarrow{AB}=a\vec{i},\ \overrightarrow{AD}=a\vec{j},\ \overrightarrow{AA_1}=a\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=a\vec{i}+a\vec{j},$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=-a\vec{j}+a\vec{i}.$$



94 pav.

Iš čia randame mus dominančių vektorių stačiakampes dekartines koordinates: $\overrightarrow{AC_1}=(a;a;a)$, $\overrightarrow{AC}(a;a;0)$, $\overrightarrow{DB}(a;-a;0)$.

Kampams α ir β rasti taikysime kampo tarp dviejų vektorių kosinuso formulę:

$$\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Taigi gauname:

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1};\overrightarrow{AC}})=\frac{a\cdot a+a\cdot a+a\cdot 0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+0^2}}=\sqrt{\frac{2}{3}};$$
$$\cos\beta=\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1};\overrightarrow{DB}})=\frac{a\cdot a+a\cdot(-a)+a\cdot 0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+(-a^2)+0^2}}=0.$$

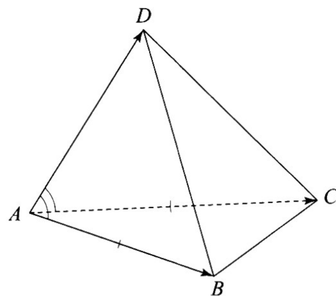
Vadinasi, $\alpha=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}},\ \beta=\frac{\pi}{2}.$

139. Trikampės piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis. Per jo viršūnę einanti piramidės šoninė briauna su lygiomis pagrindo kraštinėmis sudaro lygius kampus. Įrodykite, kad ta šoninė briauna yra statmena trečiai piramidės pagrindo kraštinei.

Sprendimas

Nagrinėkime trikampę piramidę $ABCD$ (95 pav.), kurios $AB=AC\ (=a)$, $\angle DAB=\angle DAC\ (=\varphi)$, $DA=b$. Įrodysime, kad $AD\perp BC$. Baziniais vektoriais pasirinkime vektorius

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ ir apskaičiuokime vektorių $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$ skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.



95 pav.

Kadangi

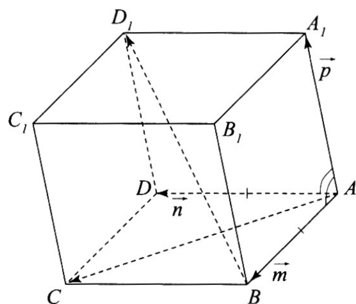
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

tai

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=ba\cos\varphi-ba\cos\varphi=0.$$

Kadangi vektorių $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$ skaliarinė sandauga lygi nuliui, tai tie vektoriai yra vienas kitam statmeni. Taigi $AD \perp BC$.

140. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ siena $ABCD$ yra kvadratas, kurio kraštinė lygi a; šoninė briauna AA_1 irgi lygi a, o su briaunomis AB ir AD ji sudaro kampus, lygius α. Raskite gretasienio įstrižainę BD_1 ir kampą tarp tiesių BD_1 ir AC.



96 *pav.*

Sprendimas

Vektorius $\overrightarrow{BD_1}$ ir $\overrightarrow{AC}$ (96 pav.) išreikškime nekomplanariais vektoriais $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$ (t. y. šiuos vektorius laikykime baziniais vektoriais):

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{m}+\vec{n}.$$

Tada randame:

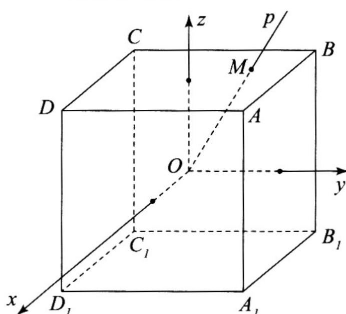
$$\overrightarrow{BD_1}^2=\vec{m}^2+\vec{n}^2+\vec{p}^2-2\vec{m}\cdot\vec{n}-2\vec{m}\cdot\vec{p}+2\vec{n}\cdot\vec{p}=$$
$$=a^2+a^2+a^2-2a\cdot a\cdot 0-2a\cdot a\cdot\cos\alpha+2a\cdot a\cdot\cos\alpha=3a^2,\ BD_1=\sqrt{3}a;$$
$$\overrightarrow{AC}^2=\vec{m}^2+\vec{n}^2+2\vec{m}\cdot\vec{n}=a^2+a^2+2a\cdot a\cdot 0=2a^2,\ AC=\sqrt{2}a;$$

$$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=-\vec{m}^2+\vec{n}\cdot\vec{m}+\vec{p}\cdot\vec{m}-\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2+\vec{p}\cdot\vec{n}=$$
$$=-a^2+0+a^2\cos\alpha-0+a^2+a^2\cos\alpha=2a^2\cos\alpha;$$
$$\cos(\overrightarrow{BD_1};\overrightarrow{AC})=\frac{2a^2\cos\alpha}{\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha.$$

Kampą tarp tiesių BD_1 ir AC pažymėję raide φ, gauname, kad $\varphi=\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\cos\alpha|\right)$.

141. Įrodykite, kad atstumų nuo kubo viršūnių iki tiesės, einančios per kubo centrą, kvadratų suma nepriklauso nuo tos tiesės.

Sprendimas



97 *pav.*

Nagrinėkime kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (97 pav.). Sakykime, kubo briauna lygi $2a$. Kubo centrą pažymėkime raide O.

Pasirinkime stačiakampę dekartinę koordinačių sistemą:

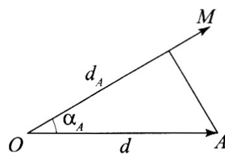
koordinačių pradžia – taškas O;

koordinačių ašys lygiagrečios su kubo briaunomis; jų kryptys parodytos 97 paveiksle. Tada taškų O, A, B, C, D koordinatės yra:

$O\,(0;\,0;\,0)$, $A\,(a;\,a;\,a)$, $B\,(-a;\,a;\,a)$, $C\,(-a;\,-a;\,a)$, $D\,(a;\,-a;\,a)$.

Per tašką O einanti tiesė p kerta kurias nors dvi lygiagrečias kubo sienų plokštumas. Sakykime, ji kerta plokštumą $ABCD$ taške $M\,(x;\,y;\,a)$.

Iš pradžių apskaičiuosime atstumo nuo vienos kubo viršūnės, pavyzdžiui, nuo viršūnės A, iki tiesės p kvadratą. Kad būtų vaizdžiau, pateiksime scheminį piešinį (98 pav.). Dar pažymėję



98 pav.

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OM}=\vec{m},\ |\vec{a}|=d,\ |\vec{m}|=m,\ (\vec{a};\vec{m})=\alpha_A,$$

gauname:

$$d_A=d\sin\alpha;\ \sin^2\alpha_A=1-\cos^2\alpha_A=1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{dm}\right)^2=\frac{d^2m^2-(\vec{a}\cdot\vec{m})^2}{d^2m^2};$$

$$d_A^2=\frac{1}{m^2}(d^2m^2-(\vec{a}\cdot\vec{m})^2).$$

Tačiau $\vec{a}(a;a;a)$, $\vec{m}(x;y;a)$, todėl

$$d^2=3a^2, m^2=x^2+y^2+d^2,\ \vec{a}\cdot\vec{m}=a(x+y+a);$$

$$d_A^2=\frac{2a^2}{m^2}(x^2+y^2+a^2-ax-ay-xy).$$

Panašiai gautume:

$$d_B^2=\frac{2a^2}{m^2}(x^2+y^2+a^2+ax-ay+xy),$$

$$d_C^2=\frac{2a^2}{m^2}(x^2+y^2+a^2+ax+ay-xy),$$

$$d_D^2=\frac{2a^2}{m^2}(x^2+y^2+a^2-ax+ay+xy).$$

Vadinasi,

$$d_A^2+d_B^2+d_C^2+d_D^2=8a^2.$$

Šiuo atveju tiesė p kerta ir plokštumą $A_1B_1C_1D_1$. Remdamiesi kubo ir tiesės p simetriškumu taško O atžvilgiu, gautume, kad ir kitų keturių atstumų kvadratų suma lygi $8a^2$.

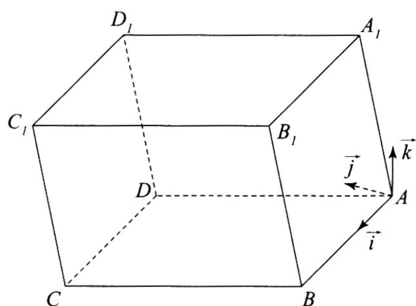
Vadinasi, uždavinio sąlygoje minimų atstumų kvadratų suma lygi $16a^2$, taigi nepriklauso nuo tiesės p.

142. Žinomi gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iš vienos viršūnės išeinančių briaunų ilgiai ir tų briaunų sudaryti kampai: $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$; $\angle BAD=\alpha$, $\angle BAA_1=\beta$, $\angle DAA_1=\gamma$. Raskite gretasienio tūrį.

Sprendimas

Kadangi

$V=S\cdot H$, $S=ab\sin\alpha$,



99 *pav.*

tai lieka rasti gretasienio aukštinę.

Pasirinkime šitokią stačiakampę dekartinę koordinačių sistemą (99 pav.): koordinačių pradžia – taškas A, vektorius $\vec{i}$ – vienakryptis su vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ vienetinis vektorius, $\vec{j}$ – vektoriui $\vec{i}$ statmenas pagrindo plokštumos vienetinis vektorius, $\vec{k}$ – pagrindo plokštumai statmenas vienetinis vektorius.

Taip parinkus koordinačių sistemą, vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ koordinatės yra:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}(a; 0; 0),\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}(b_1; b_2; 0),\ \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}(c_1; c_2; c_3).$$

Aišku, kad $H = |c_3|$.

Iš

$$\vec{b}\cdot\vec{i} = b_1\cdot 1 + b_2\cdot 0 + 0\cdot 0 = b_1,\quad \vec{b}\cdot\vec{i} = |\vec{b}||\vec{i}|\cos\alpha = b\cos\alpha,\quad b^2 = b_1^2 + b_2^2 + 0^2$$

gauname, kad

$$b_1 = b\cos\alpha,\ b_2 = b\sin\alpha,\ \text{t. y.}\ \vec{b}(b\cos\alpha; b\sin\alpha; 0).$$

Panašiai gauname, kad

$$c_1 = c\cos\beta,\ c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha = c\cos\gamma,\ c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

Iš čia randame, kad

$$|\vec{c}_3| = \frac{c}{\sin\alpha}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Vadinasi, gretasienio tūris

$$V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

18. Orientuotoji plokštuma

Šis skyrius skirtas trigonometrijai, kuri iki šiol būdavo pateikiama ir geometrijos, ir algebros ir analizės pradmenų vadovėliuose. Be to, dažniausiai tinkamai nesuderinus, kai ką dubliuojant. Aptariamoje knygelėje beveik iki skyriaus pabaigos nagrinėjami tik iškilieji kampai ($0^\circ \leq a \leq 180^\circ$).

Apibrėžiant teigiamuosius ir neigiamuosius kampus (iš pradžių tuos, kurių viena kraštinė yra abscisių ašies teigiamasis pusašis) naudojama koordinačių sistema (o ne nematematinis objektas laikrodis).

Nagrinėjant teigiamųjų ir neigiamųjų kampų kosinusus, paaiškėja, kad jiems apibūdinti kosinuso nepakanka, nes gaunama, kad

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$

Tada panaudojama ir kita koordinačių ašis – ašis Oy.

Apibrėžiamas kampo sinusas, gaunama svarbi formulė

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$

Čia gaunama ir pagrindinė trigonometrijos tapatybė

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Primename, kad kol kas, kalbant apie teigiamuosius ir neigiamuosius kampus, nagrinėti tik kampai, kurių pirma kraštinė yra spindulys Ox. Tačiau yra ir kitokių kampų. Jų orientacija siejama su turima koordinačių sistema, o ne kiekvienam kampui pasirenkama sava koordinačių sistema (nesirūpinant tų koordinačių sistemų tarpusavio ryšiu). Taigi gaunama nelygybė, pagal koordinates nusakanti kampo orientaciją.

Kalbant apie plokščiųjų figūrų lygumą, buvo minėtas galimas figūros pasukimas. Tačiau konkrečiau kalbėta tik apie vieną plokštumos posūkį – centrinę simetriją (posūkį 180° arba -180° kampu). Pateiktas bendras posūkio apibrėžimas.

Gautos ir posūkio lygtys (lygtys, siejančios taško ir jo vaizdo koordinates).

Apibrėžus plokštumos posūkį, apibendrinama ir kampo (kaip posūkio mato) sąvoka. Apibrėžiami bet kokio kampo sinusas ir kosinusas.

Susitarus, kad posūkio $\alpha + 360^\circ k$ ($-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, k – bet kuris sveikasis skaičius) kampu ir posūkio kampu α rezultatas yra tas pats ir kad posūkių apie tą patį tašką kampais β ir γ kompozicija yra posūkis apie tą tašką kampu $\beta + \gamma$ (priėmus tokias aksiomas) išvedamos kampų sumos sinuso ir kosinuso formulės. Iš jų gaunamos visos redukcijos formulės, neieškant kiekvienam atvejui tinkamų geometrinių konstrukcijų.

Uždaviniai

143. Sakykime, trikampio orientaciją (viršūnių apėjimo tvarką A→B→C) nusako vektorių pora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Įrodykite, kad B→C→A yra ta pati orientacija.

Sprendimas

Sakykime, vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ stačiakampės dekartinės koordinatės yra: $\overrightarrow{AB}(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_2; y_2)$. Tada trikampio ABC orientaciją (lyginant su koordinačių sistemos nusakyta plokštumos orientacija) nusako skaičiaus

$D = x_1y_2 - x_2y_1$

ženklas.

Nagrinėkime vektorių porą $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$.

Kadangi

$$\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(x_2 - x_1; y_2 - y_1),\ \overrightarrow{BA}(-x_1; -y_1),$$

tai vektorių poros $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ orientaciją nusakys skaičiaus

$(x_2 - x_1) \cdot (-y_1) - (-x_1) \cdot (y_2 - y_1) = -x_2y_1 + x_1y_2$,

t. y. to paties skaičiaus ženklas.

Vadinasi, A, B, C ir B, C, A yra ta pati orientacija.

144. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ stačiakampės dekartinės koordinatės yra $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(1; 4)$. Vektorius $\vec{b'}$ statmenas vektoriui $\vec{b}$, jo ilgis lygus vektoriaus $\vec{b}$ ilgiui, vektorių poros $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{a}$, $\vec{b'}$ priešingai orientuotos. Raskite vektoriaus $\vec{b'}$ koordinates.

Sprendimas

Sakykime, $\vec{b'}(x; y)$. Tada

$1 \cdot x + 4 \cdot y = 0$ (vektorių stamenumo sąlyga);

$x^2 + y^2 = 1^2 + 4^2$ (vektorių ilgiai (ilgių kvadratai) lygūs);

$(3 \cdot 4 - 5 \cdot 1)(3y - 5x) < 0$ (orientacijos priešingos, todėl orientaciją nusakančių skaičių ženklai yra priešingi, kitaip – tų skaičių sandauga yra neigiama).

Iš čia randame:

$x = -4y$,

$7 \cdot (3y - 5 \cdot (-4y)) < 0,\quad 7 \cdot 23y < 0,\quad y < 0;$

$(-4y)^2 + y^2 = 17,\ y = \pm 1.$

Taigi $\vec{b'}(4; -1)$.

145. Kampų $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ sinusą ir kosinusą išreikškite kampo α sinusu ar kosinusu (t. y. gaukite redukcijos formules).

Sprendimas

$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ \cos(-\alpha) + \cos 90^\circ \sin(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos 90^\circ \cos(-\alpha) - \sin 90^\circ \sin(-\alpha) = \sin\alpha$;

$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin 90^\circ \cos\alpha + \cos 90^\circ \sin\alpha = \cos\alpha$,

$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos 90^\circ \cos\alpha - \sin 90^\circ \sin\alpha = -\sin\alpha$;

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin180^\circ\cos\alpha - \cos180^\circ\sin\alpha = \sin\alpha$,
$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos180^\circ\cos\alpha + \sin180^\circ\sin\alpha = -\cos\alpha$;
$\sin(180^\circ + \alpha) = \sin180^\circ\cos\alpha + \cos180^\circ\sin\alpha = -\sin\alpha$,
$\cos(180^\circ + \alpha) = \cos180^\circ\cos\alpha - \sin180^\circ\sin\alpha = -\cos\alpha$;
$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ+(90^\circ - \alpha)) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ+(90^\circ - \alpha)) = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$;
$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(180^\circ+(90^\circ + \alpha)) = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$,
$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos(180^\circ+(90^\circ + \alpha)) = -\cos(90^\circ + \alpha) = \sin\alpha$.

146. Kampo 2α (dvigubo kampo) sinusą ir kosinusą išreikškite kampo α sinusu ir kosinusu.

Sprendimas

$\sin2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$, $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$, $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Literatūra

1. Katilius P., Geometrijos pagrindai. Vilnius, 1966.
2. Vaškas P., Planimetrija. Stereometrija. Vektoriai. Vilnius, 2003.
3. Vaškas P., Netradicinė geometrija. Kaunas, 2000.

Va363 **Geometrijos** uždavinynas su komentarais ir sprendimais / aut. Petras Vaškas. – Vilnius: Kronta, 2006. – 96 p.

ISBN 9955-595-77-9

Leidinyje pateikiami uždavinių iš autoriaus knygelės „Planimetrija. Stereometrija. Vektoriai“ sprendimai ir komentarai. Paskutinio skyriaus uždaviniai skirti spręsti savarankiškai. Jų nurodymai ir atsakymai pateikti minėtoje autoriaus knygelėje.
Knygelė skiriama geometrija besidomintiems moksleiviams, taip pat studentams ir mokytojams.

UDK 514.1(076)

6 sp. l. Tiražas 2000 egz.
Išleido UAB „Kronta“
Direktorė Jolanta Rimšienė
Šiaulių g. 3, 01133 Vilnius
El. paštas leidykla@kronta.lt
Interneto tinklalapis www.kronta.lt

Spausdino UAB „Arx Baltica“
Veiverių g. 142B, 46353 Kaunas